

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені В.Н.КАРАЗІНА

На правах рукопису

ГІРКА ІГОР ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 533.951

ПОШИРЕННЯ, КОНВЕРСІЯ ТА ПОГЛИНАННЯ  
ОБ'ЄМНИХ І ПОВЕРХНЕВИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ  
У ПЛАЗМІ З НЕОДНОВИМІРНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

01.04.08 – фізика плазми

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико – математичних наук

Науковий консультант  
Лапшин Володимир Ілліч,  
доктор фізико – математичних наук,  
професор

ХАРКІВ – 2003

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ 1. Поширення, конверсія і поглинання магнітогідродинамічних хвиль у плазмовому шнурі, що міститься в сильному аксіальному магнітному полі і слабкому магнітному полі з гвинтовою симетрією.....	32
1.1. Власні магнітогідродинамічні коливання плазми, що міститься в сильному аксіальному магнітному полі і слабкому полі з гвинтовою симетрією (загальний випадок).....	38
1.2. Розщеплення спектрів МГД коливань плазми гвинтовою неоднорідністю зовнішнього магнітного поля.....	48
1.3. Додаткове нагрівання плазми поблизу сателітних альфвенівських резонансів у стеллараторі.....	59
1.4. Тонка структура основного альфвенівського резонансу в плазмовому шнурі, що міститься в сильному аксіальному магнітному полі і помірному полі з гвинтовою симетрією.....	70
1.5. Резонансний вплив гвинтової неоднорідності утримуючого магнітного поля торсаторона на структуру основного альфвенівського резонансу.....	82
1.6. Структура сателітного альфвенівського резонансу на периферії плазми, що міститься в сильному аксіальному магнітному полі і помірному полі з гвинтовою симетрією.....	93
1.7. Висновки до першого розділу.....	101
Розділ 2. Поширення, конверсія і поглинання магнітогідродинамічних хвиль у плазмовому шнурі, що міститься в зовнішньому магнітному полі зі слабким гофруванням.....	103
2.1. Розщеплення спектрів МГД коливань плазми в гофрованому магнітному полі.....	107
2.2. Додаткове нагрівання плазми поблизу сателітних альфвенівських резонансів в уловлювачах з гофрованим магнітним полем.....	118
2.3. Вплив аксіальної періодичної неоднорідності утримуючого магнітного поля	

на альфвенівське нагрівання циліндричної плазми поблизу основного АР.....	129
2.4. Резонансний вплив періодичної аксіальної неоднорідності постійного магнітного поля на структуру локального альфвенівського резонансу.....	141
2.5. Тонка структура локального сателітного альфвенівського резонансу в холодній плазмі в помірно гофрованому магнітному полі.....	151
2.6. Висновки до другого розділу.....	164
Розділ 3. Поширення, конверсія і поглинання альфвенівських хвиль у плазмовому шнурі з немонотонним профілем густини.....	166
3.1. Дрібномасштабні альфвенівські коливання плазми, локалізовані поблизу вершини максимуму (мінімуму) збурення радіального профілю густини скінченної висоти (глибини).....	168
3.2. Поширення альфвенівських хвиль у плазмі великих токамаків зі струмом майже уздовж зовнішнього магнітного поля поблизу локального максимуму поперечного показника заломлення.....	181
3.3. Збільшення поглинання ВЧ потужності в області локального альфвенівського резонансу внаслідок відмінності профілю густини плазми від лінійного (точка мінімуму або максимуму).....	188
3.4. Висновки до третього розділу.....	196
Розділ 4. Поверхневі магнітоплазмові хвилі в металевих хвелеводах круглого перерізу.....	198
4.1. Азимутальні поверхневі хвилі в замагніченій плазмі.....	200
4.2. Довгохвильові несиметричні поверхневі моди плазмових хвелеводів без магнітного поля.....	209
4.3. Довгохвильові несиметричні поверхневі хвилі в магнітоактивних циліндричних хвелеводах, повністю заповнених плазмою.....	224
4.4. Вплив неоднорідності тороїдного магнітного поля на спектри поперечних поверхневих хвиль у металевих хвелеводах, повністю заповнених плазмою.....	241
4.5. Поперечні поверхневі хвилі навколо металевого кільця у тороїдному магнітному полі.....	250
4.6. Поперечні поверхневі магнітоплазмові хвилі у хвелеводі круглого перерізу,	

який заповнено двома шарами $n$ – напівпровідників.....	256
4.7. Висновки до четвертого розділу.....	264
Розділ 5. Поперечні поверхневі хвилі в плазмових хвильоводах некруглого перерізу .....	266
5.1. Поширення поперечних поверхневих хвиль у вільному плазмовому хвильоводі некруглого перерізу.....	267
5.2. Розщеплення спектрів поперечних поверхневих хвиль в плазмовому хвильово- ді некруглого перерізу без використання зовнішнього магнітного поля.....	275
5.3. Розповсюдження електромагнітних хвиль вздовж межі плазми з металевим хвильоводом довільного перерізу в аксіальному магнітному полі.....	284
5.4. Поширення поверхневих хвиль поперек осі магнітоактивного плазмового хвильоводу з діелектричним покриттям металевих стінок.....	293
5.5. Поперечні поверхневі магнітоплазмові хвилі в металевому хвильоводі прямо- кутного перерізу, який заповнено $n$ – напівпровідником.....	299
5.6. Поперечні поверхневі магнітоплазмові хвилі в металевому хвильоводі прямо- кутного перерізу, який заповнено двома шарами $n$ -напівпровідників.....	310
5.7. Висновки до п'ятого розділу.....	319
Висновки.....	320
Список використаних джерел.....	324



## ВСТУП

Низькочастотні електромагнітні хвилі з частотою нижче електронної ленгмюрівської у магнітоактивній плазмі є предметом інтенсивних наукових досліджень. Це обумовлено широкими практичними застосуваннями цих хвиль.

Теоретичні й експериментальні дослідження поширення, загасання, збудження і конверсії швидких магніто звукових хвиль (ШМЗХ) і альфвенівських хвиль (АХ) інтенсивно проводяться протягом останніх п'ятдесятьох років. Насамперед, це пов'язано з численними застосуваннями здобутків цих досліджень у проблемі керованого термоядерного синтезу (КТС), ряді задач геофізики й астрофізики. ШМЗХ і АХ є потужним засобом створення і нагрівання плазми в тороїдних магнітних уловлювачах (токамаках і стеллараторах) [1 – 3]. За допомогою високочастотного нагрівання уже на теперішній час у токамаках досягнуті температури порядку десяти кілоелектронвольт. Поряд з інжекцією нейтралів, іонним циклотронним, нижньогібридним і електронним циклотронним нагріванням МГДХ передбачається використовувати як основний метод нагрівання плазми в майбутньому термоядерному реакторі. ШМЗХ і АХ можуть бути також використані для створення струмів захоплення [4]. Розв'язання задачі підтримання струму захоплення при введенні до плазми ВЧ потужності допоможе створенню стаціонарного токамака і на його основі термоядерного реактора - токамака. Створення струмів захоплення може бути використаним також і в стеллараторах – з метою керування профілем обертального перетворення і досягнення, за рахунок цього, кращої МГД стійкості плазми.

Конструктивна простота токамака, яка дозволяє споруджувати пристрої усе більш великих розмірів, удосконалювання техніки експерименту, використання потужних джерел додаткового нагрівання забезпечили одержання плазми з параметрами, близькими до термоядерних. Разом з тим, на стадії розробки проектів реактора на основі токамака виявилися певні труднощі. Перш за все - це дисруптивна нестійкість (небезпека для першої стінки реактора), нестационарність (вплив на терміни служби конструкційних матеріалів) і малість аспектової частки (частки

великого радіуса тора до малого), що призводить до великих технологічних складностей [5].

Якщо ці труднощі виявляються такими, що їх важко перебороти, то можна розраховувати на використання стелларатора, якому не загрожують зазначені вище небезпеки. На відміну від токамака, в якому обертальне перетворення силових ліній поля створюється за рахунок струму, що протікає по плазмі, у стеллараторі воно здійснюється за допомогою зовнішніх відносно плазми провідників зі струмом. Для утримання плазми в стеллараторі немає необхідності пропускати струм крізь плазму, тому стелларатор є стаціонарним уловлювачем; у стеллараторі задачі створення і нагрівання плазми відокремлені від задач її утримання. Ідея стелларатора була запропонована в 1951р. Л.Спітцером [6] і набула на теперішній час поширення в багатьох країнах. Зокрема, стеллараторний напрямок найінтенсивніше розвивається на теперішній час у Німеччині і Японії.

Після їх передбачення Ханнесом Альфвеном у 1942 році [7] з'ясувалось, що АХ відіграють важливу роль у різноманітних плазмових процесах. В експерименті АХ вперше спостерігались наприкінці п'ятдесятих років минулого століття (див., напр., [8]). Докладні теоретичні дослідження МГД коливаль плазмового циліндра із застосуванням спрощуючих припущень, зокрема, про однорідність аксіального магнітного поля (див., наприклад [9 - 13] і цитовану там літературу) ініціювались у п'ятдесятих - сімдесятих роках, головне, термоядерними проблемами. А от розв'язання такої задачі в складному магнітному полі реальної геометрії аналітичними чи навіть числовими методами є дуже складним і поки що нездійсненим завданням. Це ініціює численні новітні аналітичні і числові дослідження питань розповсюдження МГД хвиль в неоднорідній плазмі термоядерних уловлювачів.

Слабка періодична неоднорідність магнітного поля  $\vec{B}_0$  може істотно впливати на властивості МГДХ. На перший погляд, цей вплив може здатися очевидним. Дійсно, наприклад, з фізики твердого тіла [14] відомо, що періодичний "потенціал" (подібний до неоднорідності плазми, викликаної періодичною неоднорідністю магнітного поля) призводить до виникнення в спектрі щілин, відомих як

заборонені енергетичні зони. Однак, докладне дослідження ролі періодичної неоднорідності  $\vec{B}_0$  відкриває деякі нові фізичні явища. Для демонстрації інтенсивності вивчення впливу періодичної неоднорідності  $\vec{B}_0$  (еліптичності полоїдних перерізів магнітних поверхонь, гвинтової і тороїдної неоднорідності, а також гофрування магнітного поля) на властивості ВЧ хвиль, нижче наведено лише кілька прикладів таких досліджень. Наприклад, в роботі [15] здобуто систему рівнянь, які визначають неперервний спектр ідеальної магнітної гідродинаміки в наближенні малого плазмового тиску для аксіально симетричної тороїдної рівноваги. В наступній роботі [16] здобуто аналогічну систему рівнянь, які визначають спектр ідеальної магнітної гідродинаміки для аксіально несиметричної тороїдної геометрії, і показано, що власні значення цієї системи рівнянь є реальними. Власні альфвенівські коливання радіально неоднорідної циліндричної плазми розглянуто в [17] на основі детального дослідження асимптотично розкладених розв'язків рівнянь четвертого порядку з малим параметром при старшій похідній. В роботі [18] було показано, що еліптичність перерізів магнітних поверхонь токамаків спричиняє виникнення щілин в альфвенівському континуумі плазми з поздовжнім струмом. Існування власних альфвенівських мод, обумовлених еліптичністю полоїдних перерізів плазми, так званих ЕАМ, було показано в роботі [19]. Ці альфвенівські моди мають свою макроструктуру, існують у плазмі з однорідною густиною і мають багато спільних рис із власними альфвенівськими модами, обумовленими тороїдністю. В наступній роботі [20] ці ж автори продемонстрували можливість збудження цих мод енергетичними альфа частинками завдяки транзитному резонансу. Вплив тороїдності плазми і еліптичності перерізів плазмового шнура на власні частоти і власні моди МГД хвиль було вивчено в [21]. Щілини в альфвенівському континуумі, які обумовлені тороїдністю, вивчалися в [22, 23]. Існування обумовлених тороїдністю альфвенівських власних мод у плазмі із широм з частотами усередині відповідних щілин було передбачено в цій же статті і спостерігалося експериментально, зокрема, в наступних двох роботах. А саме, збудження тороїдних альфвенівських власних мод іонами, що утворюються внаслідок інжекції енергетичних нейтральних частинок до плазми TFTR (Tokamak Fusion Test

Reactor), було продемонстровано в [24]. Крім того, гарний збіг теоретичних передбачень і експериментальних спостережень для тороїдних альфвенівських власних мод на пристрої Doublet – III – D показано в [25], тоді як вимірювані частоти ЕАМ виявились дещо вищими за теоретично передбачені. Вимірювання спектрів АХ у плазмі із широм в залежності від перпендикулярного хвильового числа в режимі, коли альфвенівська швидкість є близькою до теплової швидкості електронів, проведено в [26].

Стале магнітне поле  $\vec{B}_0$  часто буває гофрованим у лабораторній плазмі. Це має місце в адіабатичних уловлювачах з гофрованим магнітним полем [27, 28], зокрема, в токамаках, де гофрування обумовлене дискретністю котушок тороїдного магнітного поля, а також у тороїдних системах з гофрованим магнітним полем типу ELMO BUMPY TORUS [29, 30]. Планується [31], що так звана «дзеркальна» неоднорідність буде переважати в утримуючому магнітному полі модульного стелларатора Helias. Якщо в представленні напруженості магнітного поля Helias реактора, запропонованому в [31], поточкові координати замінити циліндричними координатами, то це представлення «дзеркальної» неоднорідності збіжиться з представленням гофрованого магнітного поля, яке використане у другому Розділі даної дисертації. У цьому сенсі запропонований там розгляд можна застосовувати для дослідження поширення, конверсії і поглинання МГД хвиль у Helias конфігурації.

Теорія поширення МГД хвиль у плазмовому шнурі, що міститься в слабо-гофрованому магнітному полі, розглянута в роботах [32 - 35]. У гофрованому магнітному полі електромагнітне збурювання поширюється у вигляді хвильового пакета, у якому поряд з основною гармонікою присутнє, узагалі кажучи, нескінченна кількість сателітних гармонік. Проведене в [32] дослідження показало, що обумовлена гофруванням магнітного поля багатомодовість МГД хвиль призводить у загальному випадку до зсуву власної частоти МГД хвиль на величину другого порядку за малим параметром гофрування. У роботах [36 - 39] передбачено власні коливання, обумовлені так званою «дзеркальною» неоднорідністю утримуючого магнітного поля модульного стелларатора Helias, чия просторова залеж-

ність є аналогічною до гофрування магнітного поля.

Створення і нагрівання плазми в пристроях КТС ініціювали інтенсивні дослідження процесів конверсії і поглинання електромагнітних хвиль поблизу альфвенівського резонансу [1 – 3, 40]. Досить докладний аналіз застосовності рівнянь МГД до випадку альфвенівського резонансу можна знайти, наприклад, у роботі [41]. Теоретичні дослідження АР проводяться останнім часом з урахуванням факторів, характерних для магнітних уловлювачів: тороїдності, омічного струму в плазмі, нелінійності тощо [42 - 51]. Вплив тороїдної неоднорідності плазми на форму альфвенівських резонансних поверхонь вивчався в [42, 43]. Конверсію швидких хвиль, які збуджуються антеною, в повільні хвилі на периферії термоядерної плазми досліджено в [52].

Потужність ВЧ хвиль, що поглинається поблизу АР у випадку лінійного радіального профілю густини, є зворотно пропорційною до градієнта густини [53]. З цієї причини випадок, при якому профіль густини досягає екстремуму поблизу АР, становить особливий інтерес [54 - 57]. Зазвичай збурення густини, що має екстремум, описується квадратичною параболою (див., наприклад, [54 - 56]). Такий підхід виправданий тільки або для електромагнітних коливань, що локалізовані дуже близько біля екстремуму, де профіль густини слабо відрізняється від квадратичної параболи, або у випадку збурення густини досить великої глибини. Дисперсійні властивості електромагнітних коливань у цьому випадку добре вивчені. Відомо, що спектр такої задачі має нескінченне число рівнів, що зв'язано з нескінченно високими стінками квадратичної параболи. Таким чином, наближення збурення густини у вигляді параболи, власно кажучи, є наближенням досить глибокої «потенційної ями». За реальних умов, однак, збурення завжди має скінченну глибину. Спектральні характеристики задачі зі збуренням скінченної глибини істотно відрізняються від відповідних характеристик задачі із нескінченно глибокою «потенційною ямою» [58]. Тому моделювання збурення густини плазми скінченної глибини квадратичною параболою може виявитися недостатньо точним наближенням.

Потоки швидких іонів, що утворюються при інжекції швидких нейтральних

частинок у токамаку, можуть забезпечити створення безіндуктивного струму і рівновагу плазми. У роботі [59] показано, що широві АХ можуть бути збуджені завдяки резонансу із високоенергетичними іонами пучка поблизу магнітної осі токамака, якщо пучок є радіально неоднорідним. У роботі [60] функції розподілу пучка енергетичних іонів здобуті з приблизних розв'язків рівняння Фокера - Планка і вивчені щодо ВЧ мікро нестійкостей. Показано, що тороїдна система із типовими параметрами плазми і пучка є стійкою до ВЧ мод при паралельній інжекції неперервним моноенергетичним джерелом. Колективні процеси в плазмі, які ініційовані альфа – частинками, а також класичні механізми втрат альфа – частинок в токамаках і стійкість енергетичного балансу термоядерної плазми представлені в огляді [61]. Числові та аналітичні дослідження нестійкості АХ (об'ємних АХ і кінетичних АХ) у плазмі токамака – реактора проведені в роботі [62]. Стійкість об'ємних АХ досліджено в роботі [63] за наявності надальфвенівських енергетичних частинок, тобто альфа – частинок, які є продуктом реакції в дейтерій - тритієвій плазмі токамака. Збудження АХ енергетичними іонами і вплив АХ на утримання енергетичних іонів широко і інтенсивно експериментально вивчається в таких гвинтових пристроях, як CHS і LHD [64].

Дисперсійне рівняння для МГД хвиль, що поширюються майже уздовж магнітного поля в безструмовому плазмовому торі з некруглими пологідними перерізами магнітних поверхонь, отримано в [65] - для вищих, у [66] - для нижчих і в [67] - для довільних радіальних мод. Розкладання квадрата поперечного показника заломлення МГД хвилі в ряд Тейлора за координатами поблизу точки максимуму дозволяє розділити змінні, виразити власні функції крайової задачі для рівнянь Максвела через функції Ерміта і визначити власні частоти МГД хвиль.

Дослідження дисперсійних властивостей плазмових хвилеводів, починаючи з найбільш простих моделей [68], продовжується дотепер як для випадків газової плазми [69 – 78], так і для твердотільної [79 – 83] плазми. В останнє десятиліття інтерес до власних мод плазмових хвилеводів дещо підсилюється в зв'язку з використанням їх для підтримки газових розрядів [74, 84 – 86]. Властивості газового розряду, підтримуваного аксіально - симетричними ( $m=0$ ) і дипольними ( $m=\pm 1$ )

ХПТ, що поширюються уздовж осі циліндричної камери, тобто мають ненульові аксіальні хвильові числа, експериментально досліджено в [86 - 88]. Можливість використання квадрупольних ( $m=\pm 2$ ) і октопольних ( $m=\pm 3$ ) ХПТ для підтримки газового розряду в магнітоактивному плазмовому стовпі вивчено числовими методами в роботах [74, 89].

За незвичайними електромагнітними хвилями, що поширюються поперек зовнішнього сталого аксіального магнітного поля за азимуту уздовж межі плазми в круглих циліндричних хвилеводах, закріпилася назва азимутальних поверхневих хвиль (АПХ) [90 – 95]. Ці хвилі активно досліджуються головним чином у зв'язку з їхнім можливим використанням при створенні приладів плазмової [95] і напівпровідникової [93] електроніки.

АПХ також можна було б застосовувати для створення джерел плазми. Електродинамічну модель мікрохвильового розряду, що підтримується АПХ, запропоновано в роботі [85] для випадку магнітоактивної плазми. Однак, використання магнітного поля, природно, приводить до подорожчання одиниці об'єму плазми, виробленої таким джерелом [84]. Тому для підвищення економічності газового розряду краще використовувати ХПТ, що можуть поширюватися за відсутності зовнішнього магнітного поля [96, 97]. Такими хвилями є, наприклад, АПХ. Властивості газового розряду, який підтримується АПХ, досліджено в роботах [98, 99], в тому числі за умов відсутності сталого магнітного поля [100 - 107].

Дисперсійні властивості АПХ, що поширюються в циліндричних плазмових хвилеводах без магнітного поля з однорідним радіальним профілем густини, досліджено в [108]. Вплив неоднорідності радіального профілю густини плазми на властивості ХПТ із нульовим аксіальним хвильовим числом,  $k_z=0$ , і ненульовим азимутальним номером моди,  $m \neq 0$ , вивчено в роботі [109], а властивості аксіально симетричних хвиль (випадок, коли  $k_z \neq 0$ , а  $m=0$ ) розглянуто у [110]. Відзначимо, що на відміну від магнітоактивних плазмових хвилеводів, за відсутності зовнішнього магнітного поля АПХ не поширюються уздовж межі холодна плазма - метал, що відповідає уявленню теорії плазмових хвилеводів [68].

При пучковому методі збудження часто використовують уповільнюючі

елементи: гребінки, диски тощо. Це дає змогу подовжити час взаємодії частинок пучка із відповідною власною хвилею структури, а внаслідок цього підвищити к.к.д. генераторів ВЧ коливань [70, 111]. Додаткові можливості при конструюванні ефективних приладів ВЧ електроніки надає створення багатокомпонентних хвилеводних структур [79, 80, 112]. Наявність різних плазмових та діелектричних вставок у металевому хвилеводі призводить до збільшення кількості його власних хвиль та, відповідно, фізичних ефектів, які пов'язані із їх поширенням та взаємодією. Ця обставина знаходить своє відображення під час проектування різноманітних радіотехнічних пристроїв різного призначення у плазмовій та напівпровідниковій електроніці [80, 113, 114]. Цим обумовлена актуальність проблеми розрахунків уповільнюючих резонансних багатокомпонентних структур.

Інтерес до дисперсійних властивостей ПХ, які розповсюджуються у плазмових хвилеводах, обумовлений можливістю їх використанні у приладах надвисоко-частотної електроніки [80, 83, 115]. Властивості ПХ, які розповсюджуються вздовж плоскої межі гіротропної плазми з металом, в тому числі і нелінійні, детально досліджено в роботах [116 - 118]. Огляд досягнень з теорії ПХ, які поширюються у плазмових хвилеводах поперек зовнішнього магнітного поля (геометрія Фойгта), подано в огляді [119]. Як показано в [120], врахування кривини поверхні вздовж напрямку розповсюдження ПХ істотно впливає на властивості хвиль: тангенціальний компонент електричного поля хвилі перестає дорівнювати нулю (в планарній геометрії це можливо або у випадку плазми неоднорідної густини, або при урахуванні скінченного тиску), змінюються частотні діапазони існування ПХ. Однак розповсюдження ПХ уздовж межі плазми з металом в поперек вісі гіротропного хвилеводу довільного перерізу раніше не було розглянуто. Але ж перші експериментальні дослідження [121] ПХ на межі плазми з металом було проведено з використанням  $n$  - напівпровідникових зразків прямокутного перерізу, вакуумні хвилеводи такого перерізу широко використовуються в радіотехніці.

Дисперсійні характеристики прямокутної дифракційної ґратки вперше визначено точно на основі метода сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з метою використання для проектування ВЧ підсилювачів у роботі [122]. Зокрема,



можливість застосування асимптотичних методів там показано шляхом порівняння результатів, які здобуто точним і асимптотичними методами. Числовий аналіз показав напрочуд добре узгодження дисперсійних кривих, які побудовано на основі метода СІР, з кривими, які отримано асимптотичними методами.

**Актуальність теми.** Теоретичні й експериментальні дослідження поширення, конверсії та поглинання магнітогідродинамічних хвиль (МГДХ) інтенсивно проводяться протягом останніх п'ятдесяти років. Насамперед, це пов'язано з численним застосуванням результатів цих досліджень у розв'язанні проблеми керуваного термоядерного синтезу (КТС), у ряді задач геофізики й астрофізики. МГДХ є потужним засобом створення й нагрівання плазми в тороїдних магнітних пастках (токамаках і стеллараторах). За допомогою високочастотного нагрівання уже на теперішній час у токамаках досягнуті температури порядку десяти кілоелектронвольт. Поряд з інжекцією нейтралів, іонним циклотронним, нижньогібридним і електронним циклотронним нагріванням МГДХ передбачається використовувати для нагрівання плазми в майбутньому термоядерному реакторі. МГДХ можуть бути також використані для створення струмів захоплення. Розв'язання проблеми створення та підтримання струмів захоплення при введенні до плазми ВЧ потужності має на меті створення стаціонарного токамака і на його основі термоядерного реактора - токамака. Створення струмів захоплення може бути використаним також і в стеллараторах – з метою керування профілем обертового перетворення і досягнення, за рахунок цього, кращої МГД стійкості плазми.

Добре відомо, що гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля (так само, як і тороїдність, еліптичність і гофрування магнітного поля) породжує різні процеси в плазмі, що знаходять практичне застосування. Існування власних альфвенівських мод, обумовлених гвинтовою неоднорідністю утримуючого магнітного поля, із високими значеннями тороїдного хвильового числа усередині щільності в альфвенівському континуумі, обумовленої гвинтовою неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , було передбачено в [123]. При інжекції нейтралів у стеллараторі Wendelstein W7-AS спостерігалася когерентна МГД активність, що збуджувалася енергетичними частинками пучка при помірних і низьких значеннях плазмового тиску [124, 125].

Пояснення цієї активності було дано в термінах мало стійких об'ємних альфвенівських власних мод, що збуджувалися в діапазоні нижче альфвенівського континуума. Власні альфвенівські коливання в складній магнітній конфігурації майбутнього Helias реактора розраховані числовими методами в роботах [36 - 39]. Зокрема, там передбачено власні коливання, обумовлені гвинтовою неоднорідністю утримуючого магнітного поля в Helias реакторі. Ефективне застосування числових кодів для дослідження власних МГД коливань в складній магнітній конфігурації Wendelstein 7-AS продемонстровано в роботі [126]. У роботі [127] концепцію руху дрейфових островів запропоновано для усунення попелу та інжекції високо енергетичних іонів з великими паралельними швидкостями в пристроях з гвинтовим зовнішнім магнітним полем.

Нагрівання плазми термоядерних пасток у режимі резонансного збудження МГДХ (цей режим реалізується за умов, коли частота генератора збігається з частотою власних МГД коливань плазмового шнура) може бути ефективним у пастках малих розмірів і/або при використанні хвиль накачування із частотою, що є набагато меншою за іонну циклотронну частоту (оскільки загасання таких МГДХ є слабким). Успіхи в нагріванні плазми ВЧ методами у великих пастках пов'язані з застосуванням режимів випромінювання у напівпростір. Для аналізу обох цих режимів нагрівання необхідно попередньо знати дисперсійні властивості плазмових резонаторів із послідовним, якомога повнішим урахуванням численних характеристик плазми та магнітної конфігурації пасток. До числа таких характеристик, що визначають особливості поширення, збудження, конверсії і поглинання МГД хвиль, належать неоднорідність густини і температури плазми, складна форма магнітних поверхонь, обумовлена тороїдністю й обертальним перетворенням, що роблять задачу істотно двовимірною чи навіть тривимірною. За наявності резонансних областей, у яких відбувається конверсія МГД хвиль у дрібномасштабні хвилі (ці області також двовимірно чи тривимірно неоднорідні), розв'язання задачі про поширення, трансформацію і поглинання МГДХ навіть за допомогою ЕОМ є дуже складним і поки що не здійсненим. Саме тому ці обставини стимулюють і виправдовують спроби аналітичного розв'язання задач цього типу.

Локальний альфвенівський резонанс (АР) у випадку прямого постійного магнітного поля  $\vec{B}_0$  інтенсивно вивчається, починаючи з робіт [53, 128 - 136], тощо, головним чином, завдяки застосуванню цього явища для ефективного одержання і нагрівання плазми в термоядерних уловлювачах. Детальний огляд теоретичних досліджень АР поданий, наприклад, в роботах [2, 40]. При нагріванні плазми ВЧ полями, більшість ВЧ потужності поглинається в області локального АР. АР ефективно використовується для створення плазми та її нагрівання на стеллараторах "Ураган" в ННЦ "ХФТІ" [137, 138]. При цьому була створена плазма з густиною до  $10^{13} \text{ см}^{-3}$  та температурою електронів та іонів порядку кількох сотень електрон-вольт. Створення такої плазми дало можливість дослідити цілий ряд фізичних явищ. Перенесення тепла і частинок, включаючи нейтральні, при височастотному нагріванні з використанням АР експериментально і теоретично досліджені в роботі [139]. В роботі [140] теоретично пояснено поглинання альфвенівських хвиль (АХ) за рахунок параметричної іонної циклотронної нестійкості, порашовані профілі енерговиділення і на цій основі вивчено перенесення частинок плазми і тепла в "Урагані -3 М".

Разом із тим, добре відомо, що при збільшенні густини й розмірів плазмового шнура області АР зміщуються на його периферію. Це знижує ефективність альфвенівського метода нагрівання плазми в пастках КТС, оскільки призводить до нагрівання периферійної плазми, а не її центральної області, що, в свою чергу, підсилює небажану взаємодію плазми зі стінкою. Аби уникнути нагрівання периферійної плазми і гріти центральну область плазми, можна застосовувати хвилі із великим значенням поздовжнього хвильового числа  $k_z$ , для яких область локального АР розташована в глибині плазми. Але електромагнітні хвилі з великими  $k_z$  погано проникають до плазми через широкий бар'єр непрозорості на краю плазми для таких хвиль. Можна також застосувати хвилі із низькою частотою і малим  $k_z$ , для яких область локального АР також знаходиться в глибині плазми. Але для цього потрібна довга в аксіальному напрямку антена. Ці несприятливі обставини ускладнюють використання альфвенівського метода нагрівання плазми у великих пастках і ініціюють пошук нових фізичних шляхів підвищення його ефективності,

чому і присвячена значна частина даної дисертаційної роботи.

Сильно нерівноважний розподіл швидких іонів, які виникають, зокрема, при інжекції нейтралів, може призводити до збудження нестійких альфвенівських і швидких магнітозвукових хвиль, якщо густина струму перевищить граничне значення, що визначається загасанням хвиль унаслідок черенковського й іонного циклотронного загасання. Розгляд цього питання стосовно токамаку ITER для спрощеної моделі плазми у вигляді порожнього циліндра показав, що граничне значення густини струму визначається збудженням перших радіальних мод. Це граничне значення виявилось дуже чутливим до параметрів пучка іонів і параметрів хвиль [141, 142]. Розв'язання задачі про збудження МГД хвиль пучком швидких іонів вимагає знання власних частот у якомога більш реалістичній моделі.

Іншою сферою практичного застосування знань про власні частоти хвильоводів із плазмовим заповненням є плазмова електроніка. Ці знання є необхідними для вибору оптимального режиму генерації коливань у них, тому що найбільш ефективна взаємодія плазми з пучками заряджених частинок [113, 143, 144] чи з зовнішнім перемінним електричним полем [145] відбувається саме поблизу власних частот. При цьому наявність плазмового заповнення не лише дозволяє істотно збільшити струм пучка, який можна транспортувати в такому хвильоводі, але й призводить також до розширення спектра власних частот хвильоводу.

Збудження електромагнітних хвиль поверхневого типу (ХПТ), що поширюються точно уздовж азимуту в циліндричних плазмових хвильоводах з однорідним радіальним профілем густини, може бути використане в різних приладах радіотехніки і плазмової електроніки, наприклад, для генерації електромагнітного випромінювання в сантиметровому і навіть міліметровому (у випадку використання напівпровідникової плазми з концентрацією носіїв заряду  $n > 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ) діапазонах довжин хвиль.

Власні моди плазмових хвильоводів використовуються для підтримання газових розрядів [86]. Плазмові джерела, що працюють на ХПТ без використання зовнішнього магнітного поля, знаходять широке застосування в плазмових технологіях, наприклад, для обробки твердотільних пластин із великою робочою пове-

рхнею [96]. Перевагою АПХ у порівнянні з іншими ХПТ є та обставина, що вони не виносять своєї енергії за межі області взаємодії, бо вони поширюються за азимутом уздовж стінки розрядної камери. Унаслідок цього підвищується ефективність розряду. Поширюючись вздовж межі плазма – метал АПХ є односпрямованими. Тобто в заданому частотному діапазоні можуть поширюватись АПХ лише с певним знаком азимутального хвильового числа. Це унеможливорює наявність відбитого сигналу і може бути дуже корисним при розробці радіотехнічних пристроїв.

Узагальнюючи сказане вище, можна встановити, що у дисертації вивчаються об'ємні МГД хвилі та ХПТ, що поширюються точно вздовж малого азимуту або є довгохвильовими в аксіальному напрямку. Беручи до уваги, що МГДХ ефективно застосовуються для нагрівання плазми в пастках КТС, і ХПТ активно використовується у багатьох плазмових технологічних процесах, можна впевнено стверджувати, що вибір об'єкту досліджень у даній дисертації є дійсно актуальним для фізики плазми, а розробка запропонованої теми і практичне використання її теоретичних результатів буде на користь Україні.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дослідження, що склали зміст дисертації, проведені відповідно до державних науково-дослідних програм, що виконувалися і виконуються на поточний час на кафедрі загальної та прикладної фізики фізико - технічного факультету Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна відповідно до координаційного плану “Взаємодія електромагнітного випромінювання і потоків заряджених часток з речовиною”, а саме: - “Дослідження нелінійних, параметричних явищ при високочастотному нагріванні плазми та матеріалів для її діагностики”, номер держреєстрації № 0194U018582 (при виконанні цієї науково-дослідної роботи дисертант був виконавцем); - “Дослідження електродинамічних властивостей пучково – плазмових систем”, номер держреєстрації № 0197U002500 (дисертант був науковим керівником); - “Електродинамічні та оптичні властивості фрактальних та надрозмірних систем”, номер держреєстрації № 0100U003299 (дисертант був науковим керівником).

Певна частина досліджень за темою дисертаційної роботи виконана відповідно до технічних завдань наступних проектів Державного Фонду Фундаментальних Досліджень (ДФФД) Міністерства України у справах науки й технологій: - Проект # 09.02.02/005-92.8303 «Розробка теорії взаємодії електромагнітних хвиль з плазмою і стійкості плазми при нагріванні плазми і підтримання стаціонарного струму в магнітних пастках» (дисертант був виконавцем); - Проект # 2.5.2/21 «Параметричні ефекти в пучково-плазмових системах у магнітному полі» (дисертант був відповідальним виконавцем); - Проект # 2-4/700 «Вплив неоднорідності рівноважних параметрів плазми та магнітного поля на дисперсію, стійкість та поглинання електромагнітних хвиль в плазмових пастках» (дисертант був відповідальним виконавцем). На теперішній час дисертант є виконавцем проекту ДФФД # 02.07/246 «Параметричні ефекти в магнітоактивних пучково-плазмових системах».

Дослідження додаткового нагрівання плазми поблизу сателітних АР (САР) у торсатронах, що увійшли до першого розділу дисертації, виконані в межах проектів Міжнародної Агенції з Атомної Енергії (контракт № 8931/RO) і Науково-Технологічного Центру в Україні (НТЦУ) (Проект № 253 «Дослідження механізмів нагрівання плазми електромагнітними полями та явищ плазмохімії»), де дисертант брав участь у якості виконавця. Тонка структура АР в тривимірно неоднорідному магнітному полі вивчалась за двома зазначеними нижче проектами НТЦУ, в яких дисертант відповідно був та є керівником: Проект № P054 «Перенесення домішкових іонів у стеллараторах та розвиток методів нанесення покриттів на антени, що працюють у діапазоні іонного циклотронного резонансу»; - Проект № 2313 «Перенесення домішків та електромагнітні хвилі в периферійній плазмі в конфігурації ГЕЛІАС реактора та Вендельштайн 7Х».

**Мета і задачі дослідження.** Основною метою дисертаційної роботи є теоретичне дослідження поширення, конверсії й поглинання об'ємних МГДХ і поперечних ХПТ у плазмових металевих хвилеводах з урахуванням тривимірної неоднорідності утримуючого сталого магнітного поля та металевої поверхні камери, а також визначення можливості застосування цих хвиль у термоядерних пастках і у

приладах плазмової електроніки. Для досягнення цієї мети в дисертації сформульовано й розв'язано ряд задач про дисперсійні властивості об'ємних МГДХ і поперечних ХПТ, їхнє поглинання в області АР:

1. Аналітично дослідити вплив періодичної неоднорідності плазми вздовж напрямку поширення електромагнітних хвиль на власні частоти і просторовий розподіл полів власних мод об'ємних і поверхневих хвиль, включаючи розщеплення спектрів за рахунок цієї неоднорідності.

2. Аналітично дослідити альфвенівське нагрівання плазми поблизу САР, виникнення яких обумовлено періодичною неоднорідністю плазми: гвинтовою – у торсатронах і гофруванням - в адіабатичних пастках і токамаках. Показати можливість істотного додаткового нагрівання плазми поблизу САР у магнітних пастках керованого термоядерного синтезу.

3. З'ясувати умови, за яких тонка структура основного і сателітних АР визначається саме періодичною неоднорідністю плазми, включаючи випадок, коли ця неоднорідність зв'язує в один пакет дві основні гармоніки. Дослідити альфвенівське нагрівання плазми за цих умов.

4. Вивчити можливість існування власних дрібномасштабних АХ і підсилене альфвенівське нагрівання плазми поблизу мінімуму (максимуму) на радіальному профілі густини плазми, а також вплив поздовжнього струму в токамаках на дисперсійні властивості АХ, що поширюються поблизу локального максимуму поперечного показника заломлення.

5. З'ясувати можливість поширення і дослідити дисперсійні властивості АПХ у замагнічених плазмових хвильоводах.

6. Узагальнити теорію АПХ на випадок ХПТ із малими аксіальними хвильовими числами, а також на випадок тороїдних хвильоводів.

7. Вивчити поширення поперечних ХПТ уздовж межі плазма – метал поперек зовнішнього аксіального магнітного поля у металевих хвильоводах некруглого перерізу, аж до майже прямокутних, включаючи хвильоводи із двошаровим  $n$  – напівпровідниковим заповненням.

*Об'єкт дослідження* – процеси поширення, конверсії й поглинання

об'ємних МГД і поперечних ХПТ у дво – і тривимірно неоднорідній плазмі магнітних пасток і циліндричних плазмових хвильоводів з металевими стінками.

*Предмет дослідження* – дисперсійні властивості швидких магнітозвуків і альфвенівських хвиль при їхньому поширенні в плазмі термоядерних пасток із сталим магнітним полем, яке є періодично неоднорідним (гофрованим або гвинтовим); обумовлена періодичною неоднорідністю плазми тонка структура основних і сателітних АР у таких пастках за умови, що вплив цієї неоднорідності є сильнішим за вплив інших ефектів, як то зіткнень між частинками плазми, інерції електронів, скінченності ларморівського радіуса іонів, стрикційної нелінійності, іонної циклотронної турбулентності; власні хвилі поверхневого типу, що поширюються в ізотропних плазмових хвильоводних структурах типу метал-діелектрик-плазма і поперек сталого зовнішнього магнітного поля у металевих хвильоводах довільного перерізу, що є повністю заповнені плазмою.

*Методи дослідження.* Для вивчення дисперсійних властивостей електромагнітних хвиль у періодично неоднорідній плазмі був використаний метод Флоке - Блоха: у загальному випадку хвильовий пакет складається з основної і двох найближчих просторових гармонік, у резонансному випадку хвильовий пакет складається з двох основних гармонік і двох найближчих просторових гармонік. Задачі розглядаються на підставі розв'язання рівнянь Максвелла із залученням тензора діелектричної проникливості холодної плазми, в якому враховано зіткнення між частинками. Періодична неоднорідність плазми вважається слабкою, що поряд з урахуванням симетрії задачі дозволяє звести тривимірно неоднорідну задачу до одновимірної. Диференціальні рівняння розв'язуються за допомогою спеціальних функцій, методом варіації сталої і методом Лапласа. Дисперсійні рівняння розв'язуються аналітично - методом послідовних наближень і за допомогою ПЕОМ. Вплив іонної циклотронної турбулентності враховується шляхом введення ефективної частоти розсіяння електромагнітних хвиль на турбулентних пульсаціях. При вивченні тонкої структури АР, а також властивостей АХ поблизу точки мінімуму (максимуму) на радіальному профілі густини застосовувався метод “вузького шару”.



**Наукова новизна результатів.** У дисертаційній роботі вперше аналітично вивчений вплив багатомодовості МГДХ на їхні дисперсійні властивості і тонку структуру АР у випадку, коли зв'язок просторових гармонік обумовлено періодичною неоднорідністю сталого магнітного поля в термоядерних пастках типу токамак і стелларатор.

Уперше встановлено, що періодична неоднорідність магнітного поля може справляти вирішальний вплив (замість інших слабких ефектів, зокрема, інерції електронів і скінченності ларморівського радіуса іонів) на тонку структуру локальних АР у периферійній плазмі, де ріпли магнітного поля є більшими і плазма – холоднішою, ніж у глибині плазми. Уперше доведено можливість додаткового нагрівання термоядерної плазми поблизу САР.

Уперше враховано скінченність збурення радіального профілю густини при дослідженні дисперсійних властивостей дрібномасштабних АХ, локалізованих поблизу цього збурення.

Уперше дисперсійні властивості ХПТ із малими аксіальними хвильовими числами в ізотропних хвилеводах із діелектричним прошарком між плазмовим стовпом і металевою стінкою камери досліджені аналітично для довільних номерів азимутального номера моди. Вперше з'ясовано умови, за яких можлива резонансна взаємодія довгохвильових ХПТ незвичайної поляризації з довгохвильовими об'ємними хвилями звичайної поляризації у металевих хвилеводах, які повністю заповнені плазмою.

Уперше доведено, що поперечні ХПТ можуть поширюватися уздовж межі плазма-метал поперек сталого магнітного поля в тороїдних хвилеводах круглого перерізу і у хвилеводах майже прямокутного перерізу, які заповнені двома шарами  $n$ -напівпровідників, а також вивчені дисперсійні властивості ХПТ у таких хвилеводах.

Уперше вказано на можливість поширення поперечних поверхневих коливань іонної компоненти плазми в замагнічених циліндричних плазмових хвилеводах.

Уперше досліджено уповільнення поперечних ХПТ і розщеплення їхніх

спектрів у плазмових хвильоводах некруглого перерізу без магнітного поля, а також доведено можливість їхнього використання для підтримання газових розрядів.

**Практичне значення результатів.** Оскільки збудження електромагнітних хвиль відбувається найбільш ефективно на власних частотах плазмових пасток і хвильоводів, важливо знати ці власні частоти з максимально можливим врахуванням усіх деталей облаштування цих хвильоводів. Вимірювання частоти биттів із певною аксіальною довжиною хвилі у хвильоводах із періодичною неоднорідністю плазми можуть бути використані для діагностики плазми.

В дисертаційній роботі визначено тонку структуру АР за умов, коли вона керується саме періодичною неоднорідністю зовнішнього магнітного поля. Показано, що ці умови можуть виконуватись в периферійній плазмі сучасних термоядерних пасток.

В роботі знайдено також наступні умови, за яких додаткове нагрівання плазми поблизу САР у термоядерних пастках може бути суттєвим і компенсувати недоліки, властиві для основного АР. По - перше, коли збуджується МГДХ, в якій аксіальна довжина хвилі основної гармоніки є великою порівняно до періоду неоднорідності плазми, тоді основний АР може знаходитись на периферії густої плазми. При цьому один або навіть обидва САР знаходяться в глибині плазми та забезпечують нагрівання центральної плазми. По – друге, у плазмі малої густини основний АР може бути взагалі відсутнім, тоді наявність саме САР може забезпечити поглинання хвилі накачування. По – третє, швидкі магнітозвукові хвилі (у яких аксіальне хвильове число є більшим за вакуумне, і частота є більшою за іонну циклотронну), на відміну від АХ, узагалі не відчують основного резонансу. Тоді для цих хвиль САР може зробити помітний внесок до небажаного нагрівання периферії плазми термоядерної пастки.

Оскільки відомо, що величина ВЧ потужності, що поглинається поблизу локального АР за умов лінійного радіального профілю густини, є зворотно пропорційною до градієнта густини, природно було передбачити підсилене поглинання хвилі накачування поблизу локального АР, в якому спостерігається екстремум ра-

діального профілю густини. Проведене в дисертаційній роботі дослідження показало, якою мірою зростає поглинання хвилі накачування в цьому випадку, що є важливим для пояснення результатів експериментів.

ХПТ із малими аксіальними хвильовими числами можуть бути застосовані для підтримання газового розряду низького тиску з високим ступенем азимутальної однорідності в плазмово - технологічних пристроях.

Знання дисперсійних властивостей ХПТ з урахуванням неоднорідності густини плазми, магнітного поля і металеві камери можуть бути використані для проектування приладів плазмової електроніки, а також пояснення підвищеної небажаної взаємодії плазми з камерою в експериментах з КТС. Необхідність врахування некруглої форми металеві камери хвилеводу пояснюється використанням уповільнюючих структур у приладах плазмової електроніки, хвилеводів прямокутного перерізу в радіофізиці, можливістю моделювати в такий спосіб форму анодного блока магнетрона, шафранівський зсув осі, D- подібну форму перерізу камери токамака тощо. Властивість поперечних ХПТ поширюватися вздовж межі плазма-метал поперек зовнішнього магнітного поля лише в одному певному напрямку, тобто неможливість для них виникнення відбитої хвилі, може бути важливою з точки зору радіотехнічних застосувань. Джерела електромагнітного випромінювання на поперечних ХПТ мали б малі поздовжні розміри і високий коефіцієнт передачі енергії від кільцевого пучка заряджених частинок до хвилі.

**Особистий внесок здобувача.** В усіх роботах, що опубліковані за темою дисертаційної роботи, здобувач брав визначальну участь при постановці задач і написанні тексту всіх робіт. З 26 статей, що опубліковані за темою дисертації, шість робіт є одноосібними.

Здобувач особисто довів можливість поширення ХПТ уздовж межі метал – магнітоактивна плазма в циліндричних хвилеводах із довільним перерізом, вивів дисперсійне рівняння й одержав аналітичні вирази для малих поправок до власних частот у роботі [146]. У статті [147] дисертантом визначений просторовий розподіл електромагнітних полів поблизу сателітного альфвенівського резонансу, а також порахована високочастотна потужність, що поглинається поблизу цього ре-

зонансу, для випадку слабо гофрованого магнітного поля. Аналітичне дослідження дисперсійних властивостей поперечних ХПТ у металевому хвилеводі майже прямокутного перерізу, що повністю заповнений однорідною напівпровідниковою плазмою, виконано здобувачем у роботі [148]. Просторовий розподіл полів альфвенівської хвилі і поглинання високочастотної потужності поблизу сателітних альфвенівських резонансів, обумовлених гвинтовою неоднорідністю плазми торсатронів, визначені дисертантом у роботі [149]. Роботи [150 - 155] написані без співавторів. У роботі [156] здобувач провів аналітичне дослідження впливу відмінності форми перерізу межі поділу плазма – діелектрик і діелектрик – метал на дисперсійні властивості поперечних ХПТ у хвилеводі без магнітного поля. У роботі [157] дисертант здобув просторовий розподіл полів поперечних ХПТ у магнітоактивному хвилеводі з діелектричним прошарком між плазмою і металеву камерою некруглого перерізу. У роботі [158] здобувач знайшов умови, за яких відбувається розщеплення спектрів МГД коливань плазми в гофрованому магнітному полі, і порахував величину цього розщеплення. Аналітичне дослідження дисперсійних властивостей АПХ у замагнічених плазмових хвилеводах дисертант провів у статті [159], де ним також зроблено висновок про можливість поширення в них поперечних поверхневих коливань іонної компоненти плазми. В статті [160] дисертант проаналізував можливість підсилення турбулентного нагрівання плазми поблизу сателітних альфвенівських резонансів у гофрованому магнітному полі. У роботі [55] здобувач провів аналіз залежності потужності, що поглинається поблизу локального АР, коли там міститься точка максимуму (мінімуму) профілю густини, від параметрів плазми. Просторовий розподіл електромагнітних полів і розв'язок дисперсійного рівняння МГДХ, що поширюються у гвинтовому магнітному полі торсатрона, здобуті дисертантом у статті [161]. У роботі [67] здобувач проаналізував вплив обертового перетворення, властивого токамакам, на спектри АХ, що поширюються поблизу точки локального максимуму поперечного показника заломлення. У статті [57] дисертантом аналітично визначений просторовий розподіл полів і проведено аналітичне дослідження дисперсійного рівняння дрібномасштабних АХ, що поширюються поблизу точки макси-

муму (мінімуму) на радіальному профілі густини. У роботі [162] здобувач вивів дисперсійне рівняння поперечних ХПТ, що поширюються за малим азимутом поперек зовнішнього тороїдного магнітного поля в металевих хвильоводах, що повністю заповнені плазмою, та здобув їхні аналітичні розв'язки у певних граничних випадках. Вплив малого аксіального хвильового числа на дисперсійні властивості ХПТ в циліндричних хвильоводах із діелектричним прошарком між ізотропною плазмою і металевою камерою врахований дисертантом у роботі [163]. У роботі [164] здобувач одержав дисперсійне рівняння довгохвильових ХПТ в циліндричних металевих хвильоводах, що повністю заповнені плазмою, знайшов його аналітичні розв'язки і показав можливість резонансної взаємодії у таких хвильоводах ХПТ незвичайної поляризації з об'ємними хвилями звичайної поляризації. У роботі [165] дисертант аналітично визначив просторовий розподіл полів АХ у випадку, коли дві просторові гармоніки із протилежними значеннями поздовжнього хвильового числа, для яких співпадає просторове положення їхніх альфвенівських резонансів, зв'язані в спільний хвильовий пакет гвинтовою неоднорідністю плазми торсатрона. У статті [166] дисертант аналітично дослідив дисперсійне рівняння дрібномасштабних АХ, що поширюються поблизу точки максимуму (мінімуму) на радіальному профілі густини, з урахуванням скінченності збурення густини. У роботі [167] здобувач порахував високочастотну потужність, що поглинається поблизу АР за умови, коли в ньому відбувається поглинання двох основних гармонік, які зв'язані в спільний хвильовий пакет гвинтовою неоднорідністю торсатрона. Просторовий розподіл полів електромагнітної хвилі поблизу локального АР в пастках з помірно гофрованим магнітним полем визначений здобувачем у роботі [168], де ним також пораховано ВЧ потужність, що поглинається поблизу цього резонансу за рахунок роботи над радіальними ВЧ струмами.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати досліджень за темою дисертації доповідалися на наступних Міжнародних конференціях: IEEE International Conference on Plasma Sciences, Canada, Vancouver, 1993; 20-th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Portugal, Lisboa, 1993; IEEE International Conference on Plasma Sciences, USA, Santa

Fe, 1994; International Conference on Plasma Physics Combined with 6 Latin American Workshop on Plasma Physics, Brazil, Foz Do Iguacu, 1994; 22-nd European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, United Kingdom, Bournemouth, 1995; The Eighth Beer-Sheva International Seminar on MHD-Flows and Turbulence, Israel, Jerusalem, 1996; IEEE International Conference on Plasma Sciences, USA, Boston, 1996; 23-rd European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Ukraine, Kyiv, 1996; 6-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Ukraine, Lviv, 1996; Symposium "Plasma-97", Poland, Opole, 1997; 7-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Ukraine, Kharkiv, 1998; 6-th Ukrainian Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, as a section of Conference "Physics in Ukraine", Ukraine, Alushta, 1998; 26-th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, The Netherlands, Maastricht, 1999; 7 Українська конференція з КТС та фізики плазми, Україна, Київ, 1999; 27-th European Physical Society Conference on Plasma Physics and Controlled Fusion, Hungary, Budapest, 2000; 8 Ukrainian Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Ukraine, Alushta, 2000; International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Ukraine, Alushta, 2002; 14<sup>th</sup> International Stellarator Workshop, Germany, Greifswald, 2003.

**Публікації.** За темою дисертації надруковані двадцять шість журнальних статей, список яких приведено наприкінці автореферату.

**Структура й обсяг дисертації.** Дисертаційна робота містить вступ, п'ять розділів основного тексту з 68 рисунками, висновки і список використаних літературних джерел із 257 найменувань. Повний обсяг дисертації складає 348 сторінок, обсяг, що займають малюнки, розташовані по всій площі сторінки, складає 5 сторінок. Список використаних літературних джерел міститься на 25 сторінках.

### **Зміст дисертації.**

У **першому** Розділі дисертації вивчено поширення, конверсію і поглинання МГД хвиль з урахуванням гвинтової неоднорідності утримуючого магнітного поля, і, як наслідок, відповідної відмінності форми магнітних поверхонь від цилінд-

рів. При цьому бралось до уваги, що в цьому випадку для МГД коливань можна знехтувати інерцією електронів. На відміну від випадку аксіального магнітного поля, у якому кожна просторова гармоніка електромагнітної хвилі розповсюджується незалежно, гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля  $\vec{B}_0$  стелларатора призводить до зачеплення окремих гармонік електромагнітних полів. Тому електромагнітні хвилі розповсюджуються у гвинтовому магнітному полі у формі пакета.

Просторовий розподіл ВЧ полів власних МГД хвиль у стеллараторі аналітично визначено з урахуванням малих сателітів першого порядку. Поправку до частоти власних коливань, обумовлену відмінністю форми магнітних поверхонь стелларатора від циліндрів, визначено як малу величину другого порядку. Досліджено розщеплення спектрів МГД хвиль з аксіальною довжиною основної гармоніки, що вдвічі перевищує крок гвинтового провідника, і з азимутальним номером, що є вдвічі меншим за мультиполярність стелларатора. Показано, що в цьому випадку поправка до частоти є малою величиною першого порядку.

Показано можливість додаткового нагрівання плазми поблизу сателітних альфвенівських резонансів, у яких відбуваються підростання малих сателітних гармонік електромагнітних хвиль і їхня конверсія в дрібномасштабні кінетичні хвилі. Знайдено просторовий розподіл ВЧ полів і величину ВЧ потужності, що поглинається поблизу цих сателітних альфвенівських резонансів, у випадку, коли структура САР визначається тепловим рухом іонів та інерцією електронів, а також у випадку, коли структура САР визначається помріною гвинтовою неоднорідністю утримуючого магнітного поля.

Показано, що зворотний вплив сателітних гармонік на радіальну залежність амплітуди основної гармоніки може призводити до усунення нескінченного розриву розв'язків рівнянь Максвелла для полів хвилі в області АР, що спостерігається в прямому магнітному полі, якщо АР має місце в периферійній плазмі, де ріпли утримуючого магнітного поля є найбільшими і плазма найхолоднішою.

У **другому** розділі дисертації досліджено вплив гофрування сталого магнітного поля, в якому знаходиться плазмовий циліндр, на поширення, конверсію й по-

глинання МГД хвиль.

Досліджено власні МГД коливання неоднорідного плазмового шнура у випадку, коли аксіальна довжина МГД хвилі вдвічі перевищує період гофрування. Просторовий розподіл електромагнітних полів МГД хвилі знайдено у вигляді пакета, в якому поряд із двома основними гармоніками, які характеризуються протилежними значеннями аксіального хвильового числа, взяті до уваги також дві сателітні гармоніки. Показано, що в цьому випадку гофрування зовнішнього магнітного поля призводить до розщеплення власних частот МГД хвиль, причому поправки до частот виявляються величинами першого порядку малості за параметром гофрування.

Показано, що в уловлювачах з гофрованим магнітним полем можливе існування поряд зі звичайним АР додаткових резонансних областей (сателітних АР), у яких відбуваються підростання малих сателітних гармонік МГД хвиль і їхня конверсія в дрібномасштабні кінетичні хвилі. Визначено величину ВЧ - потужності, що поглинається поблизу цих додаткових резонансів, і декремент обумовленого цим поглинанням загасання МГД хвилі.

Визначено тонку структуру локальних АР за умов, що вплив гофрування на цю структуру є сильнішим за вплив зіткнень між частинками плазми, теплового руху іонів і інерції електронів. Ці умови можуть реалізовуватись у периферійній плазмі, де гофрування найбільше і плазма – найхолодніша.

**Третій** розділ дисертації присвячено дослідженню дисперсійних властивостей АХ, локалізованих там, де міститься екстремум електродинамічних характеристик магнітоактивної плазми, та поглинання хвилі накачування в цих областях.

Досліджено електромагнітні коливання, що локалізовані в області, де радіальний профіль густини плазми досягає екстремуму між двома локальними АР. Знайдено аналітичні вирази для власних частот і власних мод. Показано, що кінетичні АХ можуть поширюватися поблизу максимуму, і інерціальні – поблизу мінімуму густини. Розглянуто граничний перехід до збурення густини нескінченно великої глибини.

Вивчення впливу обертового перетворення на власні частоти АХ, які по-



ширюються у плазмі великих токамаків майже уздовж зовнішнього магнітного поля поблизу локального максимуму поперечного показника заломлення, узагальнено на випадок довільної еліптичної форми полоїдних перерізів магнітних поверхонь. На основі теорії збурень визначено поправку до власних частот АХ, яку обумовлено обертальним перетворенням.

Проаналізовано підсилення поглинання АХ у неоднорідній плазмі магнітних пасток, яке відбувається за умови наявності максимуму в області локального АР, порівняно з випадком лінійного профілю густини. Аналітичне дослідження проведено з урахуванням скінченності ларморівського радіуса іонів, інерції електронів та зіткнень. Підсилення поглинання хвилі накачування пояснюється збільшенням ширини АР та збільшенням характерної величини полів АХ в області АР. Здобуто аналітичні оцінки для величини ВЧ потужності, що поглинається в АР, на підставі яких проаналізовано залежність величини потужності від ширини максимуму на профілі густини та температури електронів в області резонансу. Здобуті аналітичні результати добре узгоджуються з результатами числового аналізу поглинання в області АР.

**Четвертий** розділ присвячено розвитку електродинамічної теорії хвиль поверхневого типу (ХПТ) у металевих хвилеводах круглого перерізу з плазмовим наповненням.

Досліджено дисперсійні властивості азимутальних поверхневих хвиль в замагнічених плазмових хвилеводах. Показано можливість поширення в таких хвилеводах поверхневих коливань іонного компонента.

Теоретично досліджено дисперсійні властивості електромагнітних ХПТ з довільними значеннями азимутального номера моди і малим значенням аксіального хвильового числа, що поширюються в циліндричних хвилеводах, що мають тонке діелектричне покриття внутрішньої поверхні і є частково заповненими плазмою без магнітного поля. Розраховано електродинамічні параметри стаціонарного газового розряду, підтримуваного даними ХПТ у діапазоні малих аксіальних хвильових чисел, для яких аксіальним переносом енергії ХПТ можна знехтувати в порівнянні з азимутальним. Обчислено потужність, що поглинається газорозряд-

ною плазмою в режимах омічного і резонансного загасання цих мод, а також показано, що вироблена в розряді плазма є азимутально однорідною.

Вивчено поширення ХПТ з довільними значеннями азимутального номера моди і малим значенням аксіального хвильового числа в циліндричних металевих хвилеводах, які повністю заповнено холодною магнітоактивною радіально неоднорідною плазмою. Визначено частотні діапазони існування досліджуваних хвиль. Визначено умови резонансної взаємодії поверхневої незвичайної й об'ємної звичайної мод.

На основі теорії збурень вивчено поширення ХПТ поперек кругової осі тороїдного металевих магнітоактивного хвилеводу, який повністю заповнено плазмою, а також поперек сталого тороїдного магнітного поля навколо металевих кільця, яке поміщено в плазму. Досліджено розподіл полів цих хвиль у зазначених хвилеводних структурах. Показано, що врахування тороїдності дає поправку другого порядку малості до власної частоти.

Досліджено поширення ХПТ поперек сталого аксіального магнітного поля в циліндричному хвилеводі, одну половину якого ( $0 < \varphi < \pi$ ) заповнено напівпровідником одного сорту, а другу ( $-\pi < \varphi < 0$ ) - напівпровідником іншого сорту, електродинамічні властивості яких слабо відрізняються один від одного. Просторовий розподіл полів знайдено у вигляді хвильового пакета. Амплітуду основної гармоніки пораховано з точністю до доданків другого порядку малості. Показано, що амплітуди сателітних гармонік є величинами першого порядку малості.

**П'ятий** розділ дисертації присвячено дослідженню дисперсійних властивостей поперечних ХПТ у металевих хвилеводах з плазмовим наповненням некруглого перерізу.

Досліджено уповільнення поперечних ХПТ у хвилеводі із діелектричним покриттям металевих стінок довільного перерізу і плазмовим заповненням без сталого магнітного поля. Просторовий розподіл полів ХПТ знайдено у вигляді хвильового пакета. Амплітуду основної гармоніки пораховано з точністю до доданків другого порядку малості за глибиною гофрування хвилеводу, при цьому амплітуди сателітних гармонік виявились величинами першого порядку малості.

Здобуто наочні аналітичні вирази для поправки до частоти, яка є величиною другого порядку малості, у граничних випадках широких і вузьких хвильоводів. Проаналізовано залежність цієї поправки від параметрів плазмового наповнення, діелектричного шару і хвилі. На основі секулярного рівняння досліджено розщеплення спектрів цих ХПТ. Таке розщеплення виникає за умови, що кутовий період неоднорідності межі поділу плазма - діелектрик або діелектрик - метал є у два рази меншим за кутовий період основних гармонік хвилі.

Досліджено дисперсійні властивості ХПТ, які поширюються поперек аксіального сталого магнітного поля вздовж межі плазми з металевим хвильоводом некруглого перерізу аж до випадку хвильоводу майже прямокутного перерізу, який повністю заповнено двома плоскопаралельними шарами  $n$  - напівпровідників з близькими діелектричними властивостями. При цьому виявилось, що навіть у випадку хвильоводу, поперечний переріз якого подібний до прямокутника, сторони якого розрізняються в два рази, застосування методу послідовних наближень дозволяє визначити частоту ХПТ із точністю до 4 % вже в нульовому наближенні.

У **Висновках** сформульовано основні наукові результати роботи.

## РОЗДІЛ 1

ПОШИРЕННЯ, КОНВЕРСІЯ І ПОГЛИНАННЯ МАГНІТОГІДРОДИНАМІЧНИХ  
ХВИЛЬ У ПЛАЗМОВОМУ ШНУРІ, ЩО МІСТИТЬСЯ В СИЛЬНОМУ  
АКСІАЛЬНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ І СЛАБКОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ  
З ГВИНТОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

Сформулюємо основні положення моделі плазмового хвилеводу з сильним аксіальним магнітним полем і слабким магнітним полем з гвинтовою симетрією. Ми розглядаємо поширення, конверсію і поглинання МГДХ із частотою  $\omega \ll |\omega_{ce}|$ ,  $\omega_{pe}$  ( $\omega_{c\alpha}$  і  $\omega_{p\alpha}$  – циклотронна і ленгмюрівська частоти частинок сорту  $\alpha$ ,  $\alpha=e$  для електронів,  $\alpha=i$  для іонів) у плазмовому шнурі, що розташовано коаксіально в ідеально провідній металевій камері.

При нагріванні плазми ВЧ полями ( $\omega < \omega_{ci}$ ), більшість ВЧ потужності поглинається в області локального АР,  $r=r_A$ , де виконується наступна умова,

$$\varepsilon_l \approx N_{||}^2 \equiv (ck_{||}/\omega)^2, \quad (1.1)$$

де  $\varepsilon_l$  – компонент тензора діелектричної проникливості,  $N_{||}$  – поздовжній показник заломлення,  $k_{||}$  – проекція хвильового вектора на напрямок зовнішнього магнітного поля  $\vec{B}_0$ .

У холодному наближенні (при нехтуванні інерцією електронів, іонним Ларморівським радіусом і зіткненнями між частинками плазми), розв'язки рівнянь Максвелла для полів електромагнітних хвиль, як відомо, мають наступні особливості в області АР:

$$E_r, B_\theta \propto (\varepsilon_l - N_{||}^2)^{-1}, \quad E_\theta, B_r, B_z \propto \ln|\varepsilon_l - N_{||}^2|, \quad E_z \propto (\varepsilon_l - N_{||}^2)^{-2}. \quad (1.2)$$

Навіть слабкі ефекти (тепловий рух частинок, скінченна інерція електронів, слабка нелінійність і зіткнення) можуть істотно впливати на конверсію цих хвиль у дрібномасштабні коливання і забезпечувати їхнє ефективне поглинання в цій області.

У навколоосевому наближенні стале магнітне поле (у циліндричних коор-

динатах  $(r, \varphi, z)$ )  $\vec{B}_0 = \vec{e}_r B_{0r} + \vec{e}_\varphi B_{0\varphi} + \vec{e}_z B_{0z}$  для стелларатора з мультиполярністю  $l \geq 2$  можна записати в спрощеному вигляді [169]:

$$B_{0r} = \bar{\epsilon}_h^{(l)} B_{00} \sin(l\theta), B_{0\varphi} = \epsilon_h^{(l)} l(k_s r)^{-1} B_{00} \cos(l\theta), B_{0z} = B_{00} - \epsilon_h^{(l)} B_{00} \cos(l\theta), \quad (1.3)$$

де

$$\epsilon_h^{(l)}(r) \equiv l b_l I_l(k_s r) / B_{00}, \quad \bar{\epsilon}_h^{(l)}(r) \equiv l b_l I_l'(k_s r) / B_{00}; \quad b_l = 8 J b k_s^2 K_l'(k_s b) (l c)^{-1},$$

$B_{00}$  – однорідне поле, створюване тороїдними котушками,  $\theta = \varphi - \alpha z$ ,  $b$  – радіус циліндричної поверхні, на яку покладений тонкий гвинтовий провідник зі струмом  $J$  (у нашій постановці задачі  $b$  відповідає радіусу металевої камери),  $K_l(\xi)$  – функція Макдональда,  $I_l(\xi)$  – модифікована функція Бесселя, штрих означає похідну за аргументом. У припущенні про малість струмів у гвинтових провідниках у порівнянні зі струмом у котушках тороїдного магнітного поля величини  $\epsilon_h^{(l)}$  і  $\bar{\epsilon}_h^{(l)}$  можна розглядати як малий параметр задачі,  $\epsilon_h^{(l)} \ll 1$ ,  $\bar{\epsilon}_h^{(l)} \ll 1$ , що дозволяє використовувати теорію збурень.

Гвинтовою неоднорідністю моделюється утримуюче магнітне поле стеллараторів. У випадку Helias реактора, гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля викликана, насамперед, відмінністю просторової магнітної осі від кола,  $\epsilon_h^{(1)} = 0.08r/a_p$  (див. [31]). Мультиполярності  $l=2$  відповідає [170] залежність  $\epsilon_h^{(2)} = 0$  для  $r < 1.5$  м і  $\epsilon_h^{(2)} \approx 0.002$  для  $1.5 \text{ м} < r < 1.8$  м, де 1.8 м – середній радіус граничної магнітної поверхні. Задля спрощення запису в подальшому індекси  $h$  і  $(l)$  при малих множниках  $\epsilon_h^{(l)}$  і  $\bar{\epsilon}_h^{(l)}$  писати не будемо.

Рівноважну густину плазми  $n(r, \varphi, z)$  вважаємо функцією магнітної поверхні:  $n(r, \varphi, z) = n(r_0)$ . Рівняння магнітної поверхні для поля (1.3) має вигляд

$$r_0 = r - \bar{\epsilon} (l\alpha)^{-1} \cos(l\theta) - \bar{\epsilon}^2 / (2l^2 \alpha^2 r) \cos^2(l\theta) + O(\epsilon^3), \quad (1.4)$$

де  $r_0$  слід розглядати як «номер магнітної поверхні». Точний другий інтеграл системи рівнянь силових ліній для  $l$  – західного магнітного поля здобуто в [171]. Рівняння силових ліній, що враховує доданки другого порядку малості за струмом у гвинтових провідниках, наведено в [172].

Вигляд магнітних поверхонь для поля (1.3) показаний на рис. 1.1, 1.2. На рис. 1.1 показано одну з магнітних поверхонь двозахідного стелларатора ( $l=2$ ), на

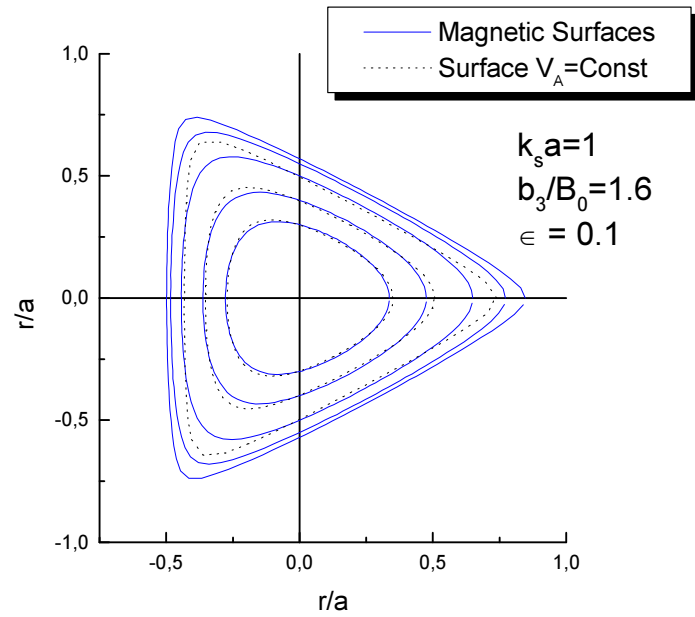
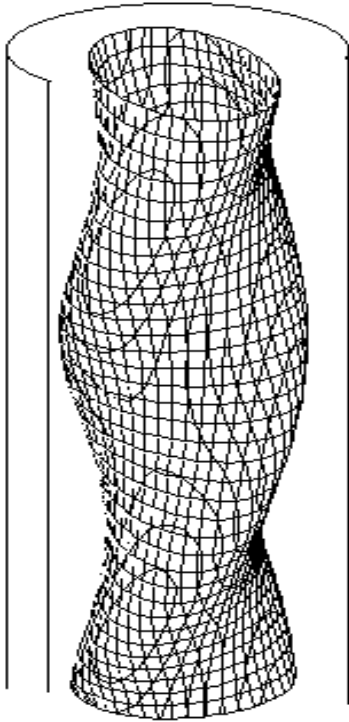


Рис.1.1 Загальний ви- Рис.1.2 Поперечний переріз магнітних поверхонь  
гляд магнітної поверхні для поля (1.3),  $l=3$ .  
для поля (1.3),  $l=2$

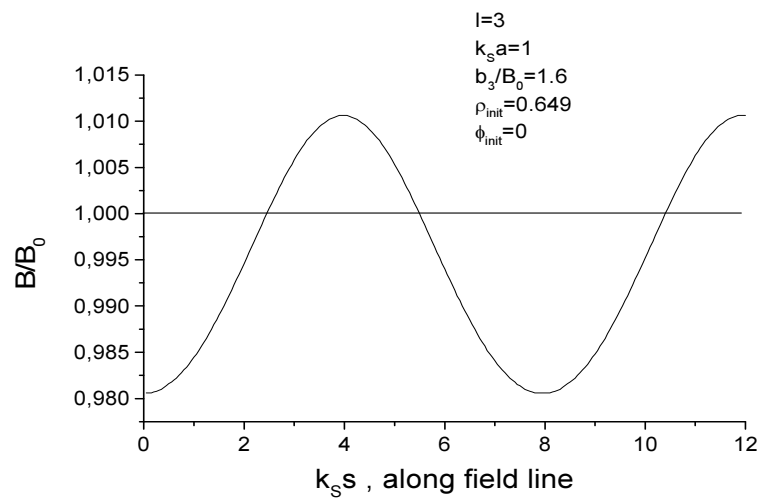


Рис.1.3 Модуль магнітного поля (1.3) вздовж силової лінії

рис. 1.2 – переріз магнітних поверхонь для поля (1.3). Модуль магнітного поля (1.3) змінюється вздовж силової лінії; це показано на рис. 1.3.

Для утримуючого магнітного поля у вигляді (1.3) у циліндричній системі координат усі дев'ять компонентів тензора діелектричної проникливості плазми відмінні від нуля. Можна, однак, увести локальну систему координат, пов'язану із силовими лініями зовнішнього магнітного поля (1.3), у якій тензор діелектричної проникливості плазми має достатньо простий вигляд:  $\varepsilon_{11}^{лок} = \varepsilon_{22}^{лок} = \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{12}^{лок} = -\varepsilon_{21}^{лок} = i\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{33}^{лок} = \varepsilon_3$ , всі інші компоненти тензора в локальній системі координат є нульовими. При цьому компоненти векторів електричної індукції  $\vec{D}$  і напруженості електричного поля  $\vec{E}$  хвилі пов'язані між собою в наступний спосіб:

$$\vec{D} = \varepsilon_1 (E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2) + \varepsilon_3 E_3 \vec{e}_3 - i\varepsilon_2 \vec{e}_3 \times \vec{E}. \quad (1.5)$$

Компоненти тензора діелектричної проникливості холодної плазми із малою частотою зіткнень в цій локальній системі координат дорівнюють

$$\varepsilon_1 = 1 - \sum_i \omega_{pi}^2(r_0) / (\omega^2 - \omega_{ci}^2), \quad \varepsilon_2 = - \sum_i \omega_{pi}^2(r_0) \omega / [(\omega^2 - \omega_{ci}^2) \omega_{ci}], \quad (1.6)$$

$\varepsilon_3$  - оператор, що визначає величину поздовжньої густини струму (поздовжньої складової вектора  $\vec{D}$ ), являє собою інтегральний оператор. Значення циклотронної частоти в (1.6) визначається повним магнітним полем  $B_0(r, \varphi, z)$  з (1.3), тобто  $\omega_{c\alpha} = eB_0 / (m_\alpha c)$ ,  $B_0 = \{B_{0r}^2 + B_{0\varphi}^2 + B_{0z}^2\}^{1/2}$ . Базисні вектори цієї локальної системи координат вибираються в такий спосіб: вектор  $\vec{e}_3$  спрямовано уздовж магнітної силової лінії:  $\vec{e}_3 = \vec{B}_0 / B_0$ , вектор  $\vec{e}_1$  є перпендикулярним до магнітної поверхні:  $\vec{e}_1 = \nabla r_0 / |\nabla r_0|$ , вектор  $\vec{e}_2$  доповнює всю систему векторів до правої трійки:  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$ .

Компоненти тензора діелектричної проникливості плазми можна розкласти за ступенями малого параметра  $\epsilon$ ,  $\bar{\epsilon}$ :

$$\varepsilon_{l,2} = \varepsilon_{l,2}^{(0)}(r) + \varepsilon_{l,2}^{(1)}(r) \cos(l\theta) + \varepsilon_{l,2}^{(2)}(r) + O(\epsilon^3), \quad (1.7)$$

де  $\varepsilon_{l,2}^{(0)}(r)$  – основні доданки, які мають місце в нульовому наближенні,

$\varepsilon_{l,2}^{(1)}(r)\cos(l\theta)$  – поправки першого порядку малості,  $|\varepsilon_{l,2}^{(1)}| \sim |\varepsilon_{l,2}^{(0)}|$ , в другому наближенні за малим параметром враховуємо поправки лише до основної Фур'є гармоніки,  $|\varepsilon_{l,2}^{(2)}(r)| \sim |\varepsilon_{l,2}^{(0)}|$ ,

$$\varepsilon_l^{(0)} = 1 + \frac{\omega_{pi}^2(r)}{\omega_{ci}^{(0)2} - \omega^2}, \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_l^{(1)} = \frac{-l}{k_s} \frac{\partial \ln(\omega_{pi}^2)}{\partial r_0} \bar{\varepsilon}(r) [\varepsilon_l^{(0)}(r) - 1] + \varepsilon(r) \frac{2(\varepsilon_l^{(0)}(r) - 1)^2}{N_A^2(r)}, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_l^{(2)}(r) = & -\frac{(\varepsilon_l^{(0)} - 1)}{k_s} \frac{\partial \ln(\omega_{pi}^2)}{\partial r_0} \left( \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4k_s r} + \frac{\varepsilon \bar{\varepsilon} (\varepsilon_l^{(0)} - 1)}{N_A^2} \right) - \frac{(\varepsilon_l^{(0)} - 1)^2}{2N_A^2} \\ & \times \left( \bar{\varepsilon}^2 + \frac{l^2 \varepsilon^2}{k_s^2 r^2} - \varepsilon^2 (\varepsilon_l^{(0)} - 1) \frac{\omega^2 + 3\omega_{ci}^{(0)2}}{\omega_{pi}^2} \right) + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4k_s^2} \frac{\partial^2 \omega_{pi}^2}{\partial r_0^2} \frac{1}{\omega_{ci}^{(0)2} - \omega^2}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_2^{(0)}(r) = \frac{\omega_{pi}^2(r)\omega}{\omega_{ci}^{(0)}(\omega_{ci}^{(0)2} - \omega^2)}, \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_2^{(1)}(r) = -\frac{\bar{\varepsilon}}{k_s} \frac{\partial \ln \omega_{pi}^2}{\partial r_0} \varepsilon_2^{(0)} + \varepsilon \varepsilon_2^{(0)} \left( 1 + \frac{2\omega_{ci}^{(0)} \varepsilon_2^{(0)}}{\omega N_A^2} \right), \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^{(2)}(r) = & -\frac{\varepsilon_2^{(0)}}{k_s} \frac{\partial \ln(\omega_{pi}^2)}{\partial r} \left( \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4k_s r} + \frac{\varepsilon \bar{\varepsilon}}{2} + \varepsilon \bar{\varepsilon} \frac{\omega_{ci}^{(0)} \varepsilon_2^{(0)2}}{\omega N_A^2} \right) \\ & + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4k_s^2} \frac{\partial^2 \omega_{pi}^2}{\partial r_0^2} \frac{\omega}{(\omega_{ci}^{(0)2} - \omega^2) \omega_{ci}^{(0)}} + \frac{\varepsilon_2^{(0)}}{4} \left( 1 + \frac{2\omega_{ci}^{(0)} \varepsilon_2^{(0)}}{\omega N_A^2} \right) \left( 2\varepsilon^2 - \bar{\varepsilon}^2 - \frac{l^2 \varepsilon^2}{k_s^2 r^2} \right) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\varepsilon_2^{(0)3} (\omega^2 + 3\omega_{ci}^2)}{\omega^2 N_A^4}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

де  $\omega_{ci}^{(0)} = \omega_{ci}(B_{00})$  пораховано в нульовому наближенні, тобто за нехтування струмами у гвинтових провідниках,  $N_A(r) = \omega_{pi}(r)/\omega_{ci}^{(0)}$  – альфвенівський показник заломлення. Кутова залежність у розкладанні (1.7) компонентів  $\varepsilon_{l,2}$  визначається симетрією утримуючого магнітного поля (1.3).

Для спрощення системи рівнянь Максвелла скористаємося тим, що при дослідженні швидкої магнітозвукової і альфвенівської гілок МГД хвиль можна знех-



тувати інерцією електронів. Для МГД хвиль у розглянутому частотному діапазоні  $|\varepsilon_3| \rightarrow \infty$ ; це дозволяє приблизно вважати  $E_3=0$ . Умова  $E_3=0$  дозволяє виразити  $E_z$  через  $E_r$  і  $E_\varphi$ :

$$E_z = -\bar{\varepsilon}(r)E_r \sin(l\theta) - E_\varphi l \varepsilon(r)/(k_s r) [\cos(l\theta) + \varepsilon(r)/2]. \quad (1.14)$$

Після цього рівняння Максвелла в області плазми зводяться до трьох рівнянь для компонентів  $B_z$ ,  $E_r$  і  $E_\varphi$  (у циліндричних координатах):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = i \frac{\omega}{c} B_z, \quad (1.15)$$

$$\frac{c}{\omega r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi} (a_{13} E_r + a_{23} E_\varphi) + \frac{c}{\omega} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + i \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{\omega}{c} \{ \varepsilon_{21} E_r + \varepsilon_{22} E_\varphi - \varepsilon_{23} (a_{13} E_r + a_{23} E_\varphi) \}, \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + i \frac{c}{\omega} \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} + i \frac{c}{\omega} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (a_{13} E_r + a_{23} E_\varphi) = -i \frac{\omega}{c} \{ \varepsilon_{11} E_r + \varepsilon_{12} E_\varphi - \varepsilon_{13} (a_{13} E_r + a_{23} E_\varphi) \}. \quad (1.17)$$

Тут  $a_{13}=B_{0r}/B_{00}$ ,  $a_{23}=B_{0\varphi}/B_{00}$  – елементи матриці переходу від локальної до циліндричної системи координат; вони можуть бути обчислені за формулою  $a_{ki}=(e_k^u, e_i)$ , де  $e_k^u$  – одиничні вектори циліндричної системи координат,  $k=r, \varphi, z$ ;  $\varepsilon_{kl}=a_{ki} \varepsilon_{ij}^{лок} a_{jl}$  – компоненти тензора діелектричної проникливості плазми в циліндричних координатах. Величини  $a_{ki}=(e_k^u, e_i)$  з точністю до другого порядку малості за  $\varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon}$  мають наступний вигляд:

$$a_{11} = (\vec{e}_l, \vec{e}_r) \approx 1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{2} \left( 1 + \frac{l^2}{k_s^2 r^2} \right) \sin^2(l\theta), \quad (1.18)$$

$$a_{21} = (\vec{e}_l, \vec{e}_\varphi) \approx \frac{l \bar{\varepsilon}}{k_s r} \sin(l\theta) + \frac{l \varepsilon \bar{\varepsilon}}{2 k_s r} \left( 1 + \frac{l^2}{k_s^2 r^2} \right) \sin(2l\theta), \quad (1.19)$$

$$a_{31} = (\vec{e}_l, \vec{e}_z) \approx -\bar{\varepsilon} \sin(l\theta) - \frac{\varepsilon \bar{\varepsilon}}{2} \left( 1 + \frac{l^2}{k_s^2 r^2} \right) \sin(2l\theta), \quad (1.20)$$

$$a_{12} = (\vec{e}_2, \vec{e}_r) \approx -\frac{l \varepsilon}{k_s r} \sin(l\theta) \left( 1 + \left( 2 + \frac{l^2}{k_s^2 r^2} \right) \varepsilon \cos(l\theta) \right), \quad (1.21)$$

$$a_{22} = (\vec{e}_2, \vec{e}_\varphi) \approx 1 - \frac{l^2 \bar{\varepsilon}^2}{2 k_s^2 r^2} \sin^2(l\theta) - \frac{l^2 \varepsilon^2}{2 k_s^2 r^2} \cos^2(l\theta), \quad (1.22)$$

$$a_{32} = (\vec{e}_2, \vec{e}_z) \approx -\frac{l\epsilon}{k_S r} \cos(l\theta) - \frac{l\epsilon^2}{k_S r} \cos^2(l\theta) + \frac{l\bar{\epsilon}^2}{k_S r} \sin^2(l\theta), \quad (1.23)$$

$$a_{13} = (\vec{e}_3, \vec{e}_r) \approx \bar{\epsilon} \sin(l\theta) (1 + \epsilon \cos(l\theta)), \quad (1.24)$$

$$a_{23} = (\vec{e}_3, \vec{e}_\varphi) \approx \frac{l\epsilon}{k_S r} \cos(l\theta) (1 + \epsilon \cos(l\theta)), \quad (1.25)$$

$$a_{33} = (\vec{e}_3, \vec{e}_z) \approx 1 - \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} \sin^2(l\theta) - \frac{l^2 \epsilon^2}{2k_S^2 r^2} \cos^2(l\theta). \quad (1.26)$$

Розв'язки системи рівнянь (1.15) – (1.17) для полів МГД хвиль мають задовольняти наступним крайовим умовам:

- поля хвилі мають бути обмеженими в усьому об'ємі камери,
- тангенціальний компонент електричного поля має дорівнювати нулю на внутрішній поверхні металевої камери;
- якщо плазма відокремлена від металевої камери вакуумним прошарком, то тангенціальні компоненти електричних і магнітних полів хвилі мають бути неперервними при переході через криву межу поділу плазма - вакуум; а саме, у локальній системі координат мають бути неперервними компоненти  $E_2$  електричного і  $B_3$  магнітного полів.

### 1.1. Власні магнітогідродинамічні коливання плазми, що міститься

в сильному аксіальному магнітному полі і

слабкому полі з гвинтовою симетрією (загальний випадок)

У цьому підрозділі досліджено вплив гвинтової неоднорідності зовнішнього магнітного поля (1.3) на власні МГД коливання радіально неоднорідного плазмового шнура [161, 173]. У межах теорії збурень здобуто дисперсійне рівняння, яке описує розповсюдження магнітогідродинамічних хвиль у плазмі, яка міститься в гвинтовому магнітному полі стелларатора. Знайдено просторовий розподіл ВЧ полів та поправку  $\delta\omega$  до власної частоти, яка зумовлена слабким відхиленням форми магнітних поверхонь від круглого циліндра.

Симетрія утримуючого магнітного поля (1.3) (див. також розкладання (1.7) для полів) дозволяє шукати розв'язки рівнянь Максвелла для аксіального компонента магнітного поля МГД хвиль у вигляді

$$B_z = \exp\{i(k_z z + m\varphi - \omega t)\} [B^-(r) + B^{(+)}(r)\exp(il\theta) + B^{(-)}(r)\exp(-il\theta)], \quad (1.27)$$

де  $B^-(r) = B^{(0)}(r) + B^{(2)}(r)$ ,  $B^{(2)} \sim \epsilon^2 B^{(0)}$ ,  $B^{(\pm)} \sim \epsilon B^{(0)}$ ,  $m$  – азимутальне хвильове число,  $k_z$  – аксіальне хвильове число основної гармоніки МГД хвиль,  $B^{(0)}(r)$  – амплітуда основної гармоніки, яку вважаємо відомою з розв'язання задачі про поширення МГД хвиль у прямому магнітному полі (з нульового наближення). Амплітуди сателітних гармонік  $B^{(\pm)}(r)$  і малу поправку  $B^{(2)}$  другого порядку до амплітуди основної гармоніки можна знайти за теорією збурень. Такий підхід до розв'язання рівнянь Максвелла прийнято називати методом Флоке - Блоха (див., наприклад, [174]). Тут і далі ми будемо нехтувати малими доданками другого порядку, пропорційними до  $\exp[\pm 2il\theta]$ , які, зрештою, дають малий внесок до власної частоти більш високого порядку, ніж  $\epsilon^2$ .

Нагадаємо основні положення розв'язання задачі в нульовому наближенні, тобто задачі про власні МГД коливання плазмового циліндра в аксіальному зовнішньому магнітному полі. Після розв'язання системи рівнянь (1.15) – (1.17) у нульовому наближенні амплітуди основних гармонік електричних полів МГДХ виражаються через  $B^{(0)}$ :

$$E_\varphi^{(0)} = -i \frac{\omega}{ck_\perp^2} \left( \frac{m}{r} \mu B^{(0)} + \frac{dB^{(0)}}{dr} \right), \quad E_r^{(0)} = - \frac{\omega}{ck_\perp^2} \left( \frac{m}{r} B^{(0)} + \mu \frac{dB^{(0)}}{dr} \right), \quad (1.28)$$

тут

$$k_\perp^2(k_z, r) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{(\epsilon_1^{(0)} - N_z^2)^2 - \epsilon_2^{(0)2}}{\epsilon_1^{(0)} - N_z^2}, \quad \mu(k_z, r) = \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)} - N_z^2}, \quad (1.29)$$

$N_z = k_z c / \omega$  – аксіальний показник заломлення хвилі. Аксіальна компонента магнітного поля  $B^{(0)}$  хвилі задовольняє рівнянню

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{k_\perp^2} \frac{dB^{(0)}}{dr} \right) + \left( 1 - \frac{m^2}{k_\perp^2 r^2} + \frac{m}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{\mu}{k_\perp^2} \right) \right) B^{(0)} = 0. \quad (1.30)$$

Його розв'язок, що є скінченним на осі циліндра:  $B^{(0)} = A_0 f_0(r)$ ,  $A_0$  - постійна інтегрування. Для довільного профілю густини рівняння (1.30) може бути розв'язане в числовий спосіб (див., наприклад [13, 175] і наступні роботи), тому функцію  $f_0(r)$  вважаємо відомою.

Застосувавши крайові умови в нульовому наближенні (циліндрична межа), здобудемо дисперсійне рівняння МГД хвиль в однорідному магнітному полі у вигляді

$$D^{(0)}(\omega, k_z, m) = 0, \quad (1.31)$$

де

$$D^{(0)} = \left( \frac{m\mu}{k_\perp r} f_0(r) + \frac{1}{k_\perp} \frac{df_0(r)}{dr} \right)_{r=b}. \quad (1.32)$$

Розв'язок  $\omega = \omega_0$  цього дисперсійного рівняння вважається відомим. Відзначимо, що в наближенні круглого циліндра  $E_z = 0$  також і в області вакуумного шару, тому для одержання дисперсійного рівняння умови неперервності  $E_z$  і  $B_\phi$  на круглій циліндричній межі поділу плазма - вакуум не використовуються.

Розглянемо тепер процедуру розв'язання рівнянь Максвелла в першому наближенні. Амплітуди перших сателітних гармонік електричного поля хвилі виражаються через магнітне в такий спосіб:

$$E_r^{(\pm)} = -\frac{\omega}{ck_\pm^2} \left( \frac{m \pm l}{r} B^{(\pm)} + G_\pm(r) + \mu^{(\pm)} \left[ \frac{dB^{(\pm)}}{dr} + F_\pm(r) \right] \right), \quad (1.33)$$

$$E_\phi^{(\pm)} = -\frac{i\omega}{ck_\pm^2} \left( \mu^{(\pm)} \left[ \frac{m \pm l}{r} B^{(\pm)} + G_\pm(r) \right] + \frac{dB^{(\pm)}}{dr} + F_\pm(r) \right), \quad (1.34)$$

де  $k_\pm = k_\perp(k_z \mp k_s)$ ,  $\mu^{(\pm)} = \mu(k_z \mp k_s)$ . Функції  $G_\pm(r)$  і  $F_\pm(r)$  є величинами першого і другого порядку малості і виражаються через електричні поля хвилі в нульовому наближенні:

$$F_\pm(r) = \frac{1}{2} E_r^{(0)} \left( \pm \frac{\overline{\epsilon} (m \pm l) N_z^{(\pm)}}{r} - \frac{\omega}{c} \epsilon_2^{(1)} \right) + \frac{i}{2} E_\phi^{(0)} \left( \frac{l \in (m \pm l) N_z^{(\pm)}}{k_s r^2} - \frac{\omega}{c} \epsilon_1^{(1)} \right), \quad (1.35)$$

$$G_{\pm}(r) = \pm \frac{\overline{\epsilon}}{2} N_Z^{(\pm)} \frac{dE_r^{(0)}}{dr} + \frac{i \in l N_Z^{(\pm)}}{2k_s r} \frac{dE_{\phi}^{(0)}}{dr} + \\ + \frac{l}{2} E_r^{(0)} \left( \pm \frac{d\overline{\epsilon}}{dr} N_Z^{(\pm)} + \frac{\omega}{c} \epsilon_l^{(1)} \right) + \frac{i}{2} E_{\phi}^{(0)} \left( \frac{d}{dr} \left( \frac{l \in}{k_s r} \right) N_Z^{(\pm)} + \frac{\omega}{c} \epsilon_2^{(1)} \right), \quad (1.36)$$

де  $N_Z^{(\pm)} = (k_z \mp k_s) c / \omega$  – аксіальний показник заломлення сателітних гармонік.

Рівняння для амплітуд сателітних гармонік аксіальної компоненти магнітного поля хвилі має вигляд

$$\frac{l}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{k_{\pm}^2} \frac{dB^{(\pm)}}{dr} \right) + \left( 1 - \frac{(m \pm l)^2}{k_{\pm}^2 r^2} + \frac{m \pm l}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{\mu^{(\pm)}}{k_{\pm}^2} \right) \right) B^{(\pm)} = \Lambda_{\pm}(r), \quad (1.37)$$

де

$$\Lambda_{\pm}(r) = -\frac{l}{r} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r}{k_{\pm}^2} (\mu^{(\pm)} G_{\pm} + F_{\pm}) \right] + \frac{m \pm l}{k_{\pm}^2 r} (G_{\pm} + \mu^{(\pm)} F_{\pm}). \quad (1.38)$$

Розв'язок рівняння (1.37) одержуємо методом варіації постійної:

$$B^{(\pm)}(r) = A^{(\pm)} f_1^{(\pm)}(r) + g_{\pm}(r), \quad (1.39)$$

де  $A^{(\pm)}$  – постійна інтегрування,  $f_1^{(\pm)}(r)$  – загальний розв'язок рівняння (1.37) з нульовою правою частиною, він є скінченним при  $r=0$  (другий розв'язок  $f_2^{(\pm)}(r)$  розходиться у нулі),  $g_{\pm}(r)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.37),

$$g_{\pm}(r) = C_1(r) f_1^{(\pm)}(r) + C_2(r) f_2^{(\pm)}(r), \quad (1.40)$$

де

$$C_1(r) = - \int_b^r \Lambda_{\pm}(r) f_2^{(\pm)}(r) W^{-1}(f_1^{(\pm)}, f_2^{(\pm)}) dr, \quad (1.41)$$

$$C_2(r) = \int_0^r \Lambda_{\pm}(r) f_1^{(\pm)}(r) W^{-1}(f_1^{(\pm)}, f_2^{(\pm)}) dr, \quad (1.42)$$

$W(f_1^{(\pm)}, f_2^{(\pm)}) = f_1^{(\pm)}(r) df_2^{(\pm)}(r)/dr - f_2^{(\pm)}(r) df_1^{(\pm)}(r)/dr$  – вронскіан функцій  $f_1^{(\pm)}, f_2^{(\pm)}$ .

Врахування малих доданків першого порядку при застосуванні крайових умов не змінює дисперсійного рівняння, але дозволяє визначити амплітуди перших сателітних гармонік  $A^{(\pm)}$ . Виділивши в крайових умовах доданки, які є пропо-

рційними до  $\exp[i(k_z \mp k_s)z + i(m \pm l)\varphi]$ , одержимо, що

$$A^{(\pm)} = D_{\pm}^{-1} \left\{ \pm \frac{l \mp k_{\pm} c}{2k_s r \omega} E_r^{(0)} - i \frac{\mp k_{\pm} c}{2k_s \omega} \frac{dE_{\varphi}^{(0)}}{dr} - \frac{(m \pm l)\mu^{(\pm)}}{k_{\pm} r} g_{\pm} - \frac{1}{k_{\pm}} \frac{dg_{\pm}}{dr} - \frac{\mu G_{\pm} + F_{\pm}}{k_{\pm}} \right\}_{r=b}, \quad (1.43)$$

де  $D_{\pm} = D^{(0)}(\omega_0, k_z \mp k_s, m \pm l)$ .

Скажемо коротко про поляризацію сателітних гармонік. Виходячи з аналізу цього питання в нульовому наближенні, можна говорити про поляризацію гармонік, ґрунтуючись на поведженні тільки першого доданка в правій частині (1.39). З рівняння (1.30) випливає, що область прозорості плазми для даної хвилі визначається умовою  $k_{\perp}^2 > 0$ . На Рис. 1.4 представлено діаграму, на якій заштриховані області, де  $k_{\perp}^2 > 0$ . Уздовж осі абсцис відкладено поточний радіус, який віднормовано на радіус камери  $b$ , профіль густини вважається параболічним,  $n(r) = n_0(1 - r^2/b^2)$ . Уздовж осі ординат відкладено аксіальне хвильове число  $k_z$ , нормоване на альфвенівське хвильове число  $k_A(0) = \omega \omega_{pi}(r=0)/(c \omega_{ci})$ , узятє на осі плазми. Частоту хвилі обрано так, що  $\omega = 0.3 \omega_{ci}$ . В області I поляризація хвилі відповідає альфвенівській гілці, а в області II – швидкій магнітозвуковій хвилі (ШМЗХ). Розглянемо як

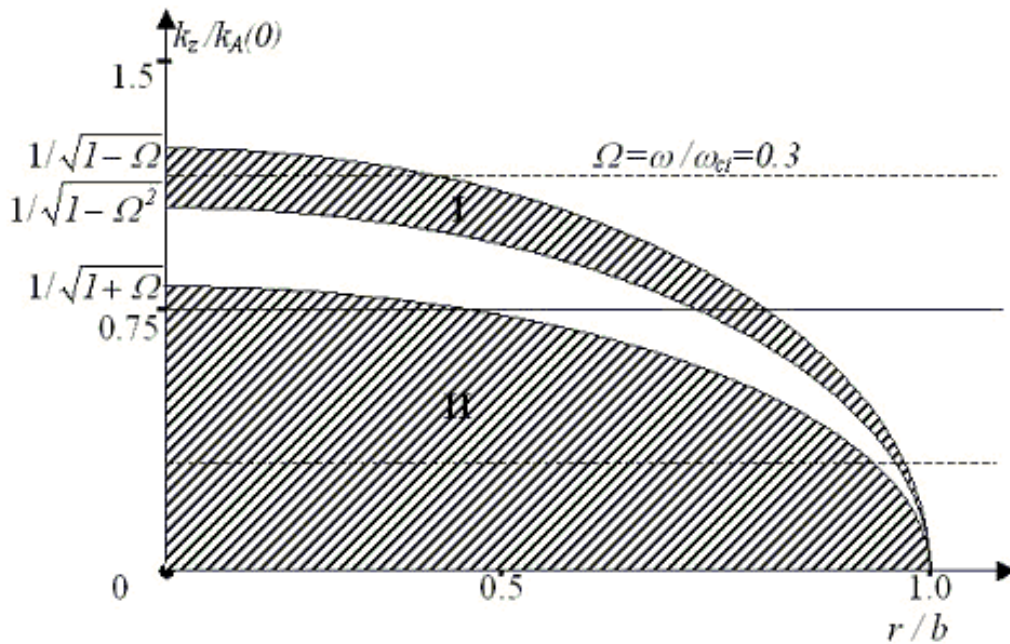


Рис. 1.4 Діаграма  $\text{sign}(k_{\perp}^2)$  в площині “радіус, нормований на радіус камери, - аксіальне хвильове число, нормоване на альфвенівське хвильове число в центрі плазмового шнура”. Заштриховано області з  $k_{\perp}^2 > 0$ .

приклад хвилю з досить малим аксіальним хвильовим числом  $k_z$  основної гармоніки, позначеним на діаграмі суцільною горизонтальною лінією. У навколоосевій області основна гармоніка поляризована як ШМЗХ, далі від осі лежить область непрозорості основної гармоніки, потім в області I основна гармоніка поляризована як АХ, і, нарешті, поблизу металевої камери лежить ще одна область непрозорості. В однієї з сателітних гармонік з аксіальним хвильовим числом  $(k_z - k_s)$ , позначеним на діаграмі нижньою пунктирною горизонтальною лінією, поляризація якісно така ж, як і в основної гармоніки. Друга ж сателітна гармоніка з аксіальним хвильовим числом  $(k_z + k_s)$ , позначеним на діаграмі верхньою пунктирною лінією, у навколоосевій області поляризована як АХ, а область плазми поблизу камери є непрозорою для цієї гармоніки.

Видно, що поляризація сателітних гармонік може відрізнятися від поляризації основної гармоніки. Можливі й інші випадки при інших співвідношеннях  $k_z$ ,  $k_s$  і  $k_A(0)$ . Відзначимо, зокрема, що якщо яка-небудь пунктирна лінія взагалі не перетинає заштриховану область, то відповідна сателітна гармоніка поширюється у вигляді поверхневої хвилі.

Розв'яжемо тепер систему рівнянь (1.15) – (1.17) у другому наближенні за малими параметрами  $\epsilon$ ,  $\bar{\epsilon}$ . Поправки другого порядку до амплітуд основних гармонік електричних полів хвилі виражаються через магнітне поле аналогічно до того, як це є у першому наближенні (див. (1.33), (1.34)):

$$E_r^{(2)} = -\frac{\omega}{ck_{\perp}^2} \left( \frac{m}{r} B^{(2)} + G^{(2)}(r) + \mu \left[ \frac{dB^{(2)}}{dr} + F^{(2)}(r) \right] \right), \quad (1.44)$$

$$E_{\phi}^{(2)} = -\frac{i\omega}{ck_{\perp}^2} \left( \mu \left[ \frac{m}{r} B^{(2)} + G^{(2)}(r) \right] + \frac{dB^{(2)}}{dr} + F^{(2)}(r) \right). \quad (1.45)$$

Тут функції  $G^{(2)}(r)$  і  $F^{(2)}(r)$  є величинами другого порядку малості:

$$F^{(2)}(r) = -\frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_2^{(1)}}{2} (E_r^{(+)} + E_r^{(-)}) - \frac{\bar{\epsilon} N_Z m}{2r} (E_r^{(+)} - E_r^{(-)})$$

$$-i \left[ \frac{\omega}{c} \frac{\epsilon_1^{(1)}}{2} - \frac{\epsilon N_Z m l}{2k_S r^2} \right] (E_{\phi}^{(+)} + E_{\phi}^{(-)}) - \frac{\omega}{c} \left( \epsilon_2^{(2)} + \frac{\epsilon_2^{(0)}}{4} \left( \bar{\epsilon}^2 - \frac{\epsilon^2 l^2}{k_S^2 r^2} \right) \right) E_r^{(0)}$$

$$-i \left[ \frac{\omega}{c} \varepsilon_1^{(2)} - \frac{\varepsilon^2 N_Z m l}{2 k_S r^2} \right] E_\varphi^{(0)}, \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(r) = & \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{2} (E_r^{(+)} + E_r^{(-)}) - \frac{N_Z}{2} \frac{d}{dr} \bar{\varepsilon} (E_r^{(+)} - E_r^{(-)}) - \frac{\bar{\varepsilon} N_Z}{2} \left( \frac{dE_r^{(+)}}{dr} - \frac{dE_r^{(-)}}{dr} \right) \\ & + i \left[ \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} + \frac{N_Z}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\varepsilon l}{k_S r} \right) \right] (E_\varphi^{(+)} + E_\varphi^{(-)}) + \frac{i \varepsilon N_Z l}{2 k_S r} \left( \frac{dE_\varphi^{(+)}}{dr} + \frac{dE_\varphi^{(-)}}{dr} + \varepsilon \frac{dE_\varphi^{(0)}}{dr} \right) \\ & + \frac{\omega}{c} \varepsilon_1^{(2)} E_r^{(0)} + i N_Z \frac{d}{dr} \left( \frac{\varepsilon^2 l}{2 k_S r} \right) E_\varphi^{(0)} + i \frac{\omega}{c} \left[ \varepsilon_2^{(2)} - \frac{\varepsilon_2^{(0)}}{4} \left( \bar{\varepsilon}^2 - \frac{\varepsilon^2 l^2}{k_S^2 r^2} \right) \right] E_\varphi^{(0)}. \quad (1.47) \end{aligned}$$

Рівняння для поправки  $B^{(2)}$  до амплітуди основної гармоніки аксіального магнітного поля хвилі має такий самий вигляд, як і рівняння (1.30) для амплітуди основної гармоніки  $B^{(0)}$ , але з відмінною від нуля правою частиною:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{k_\perp^2} \frac{dB^{(2)}}{dr} \right) + \left( 1 - \frac{m^2}{k_\perp^2 r^2} + \frac{m}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{\mu}{k_\perp^2} \right) \right) B^{(2)} = A^{(2)}(r), \quad (1.48)$$

де

$$A^{(2)}(r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r}{k_\perp^2} (\mu G^{(2)}(r) + F^{(2)}(r)) \right] + \frac{m}{k_\perp^2 r} (G^{(2)}(r) + \mu F^{(2)}(r)). \quad (1.49)$$

Його розв'язок також знаходиться методом варіації постійної:

$$B^{(2)}(r) = A^{(2)} f_0(r) + g^{(2)}(r), \quad (1.50)$$

де  $A^{(2)}$  – постійна інтегрування,  $g^{(2)}(r)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.48),

$$g^{(2)}(r) = D_1(r) f_0(r) + D_2(r) \tilde{f}_0(r), \quad (1.51)$$

де

$$D_1(r) = - \int_b^r A^{(2)}(r) \tilde{f}_0(r) W_0^{-1}(f_0, \tilde{f}_0) dr, \quad (1.52)$$

$$D_2(r) = \int_0^r A^{(2)}(r) f_0(r) W_0^{-1}(f_0, \tilde{f}_0) dr. \quad (1.53)$$

Тут  $\tilde{f}_0(r)$  – лінійно незалежний від  $f_0(r)$  розв'язок рівняння (1.30), що має особли-



вість при  $r=0$ ,  $W_0$  – вронскіан функцій  $\tilde{f}_0(r)$  і  $f_0(r)$ .

Застосування крайових умов з урахуванням доданків другого порядку малості дозволяє здобути дисперсійне рівняння для МГДХ у гвинтовому магнітному полі (1.3) у вигляді

$$D^{(0)} + D^{(2)} = 0. \quad (1.54)$$

Розв'язок дисперсійного рівняння (1.54) знаходимо у вигляді  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ , де

$$\delta\omega = -D^{(2)} \left( \partial D^{(0)} / \partial \omega \right)^{-1} \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (1.55)$$

Доданок  $D^{(2)}$  є величиною другого порядку малості,

$$\begin{aligned} D^{(2)} = \frac{k_{\perp} c}{\omega} & \left[ \frac{l \in}{2k_s b} (E_r^{(+)} - E_r^{(-)}) + \frac{i \bar{\epsilon}^2}{4k_s^2} \frac{d^2 E_{\varphi}^{(0)}}{dr^2} + \left( \frac{i \in \bar{\epsilon}}{2k_s} \left( 1 + \frac{l^2}{k_s^2 b^2} \right) - \frac{i \bar{\epsilon}^2}{4k_s^2 b} \right) \frac{dE_{\varphi}^{(0)}}{dr} + \right. \\ & \left. + \frac{i \bar{\epsilon}}{2k_s} \left( \frac{dE_{\varphi}^{(+)}}{dr} + \frac{dE_{\varphi}^{(-)}}{dr} \right) - \frac{il^2 (\bar{\epsilon}^2 - \epsilon^2)}{4k_s^2 b^2} E_{\varphi}^{(0)} \right] + \\ & + \frac{m\mu}{k_{\perp} b} g^{(2)} + \frac{1}{k_{\perp}} \frac{dg^{(2)}}{dr} + \frac{\mu G^{(2)} + F^{(2)}}{k_{\perp}} \Big|_{r=b}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Якщо вигляд залежності  $D^{(0)}(\omega)$  аналітично не заданий, наприклад, коли розподіл полів  $f_0(r)$  знаходиться у числовий спосіб, похідна  $\partial D^{(0)} / \partial \omega$  може бути обчислена [32] за теорією збурень,

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^{(0)}}{\partial \omega} = \frac{c}{i\omega \epsilon_{\perp}} & \left( -\frac{m}{r} \epsilon_2^{(0)} \tilde{f}_0(b) \int_0^b \frac{f_0 \hat{\mathcal{Q}} f_0}{W_0} dr + \frac{mf_0}{r} \frac{\partial \epsilon_2^{(0)}}{\partial \omega} \right. \\ & \left. + \frac{\partial (\epsilon_1^{(0)} - N_z^2)}{\partial \omega} \frac{df_0}{dr} - (\epsilon_1^{(0)} - N_z^2) \frac{d\tilde{f}_0}{dr} \int_0^b \frac{f_0 \hat{\mathcal{Q}} f_0}{W_0} dr \right) \Big|_{\omega=\omega_0}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Тут оператор  $\hat{\mathcal{Q}}$  визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}} f_0 = \frac{1}{r \epsilon_{\perp} (\epsilon_1^{(0)} - N_z^2)} & \frac{\partial \epsilon_{\perp}}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (\epsilon_1^{(0)} - N_z^2) \frac{df_0}{dr} \right] \\ & + \frac{1}{r \epsilon_{\perp} (\epsilon_1^{(0)} - N_z^2)} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial (\epsilon_1^{(0)} - N_z^2)}{\partial \omega} \frac{df_0}{dr} \right] - \frac{1}{(\epsilon_1^{(0)} - N_z^2)} \frac{\partial (\epsilon_1^{(0)} - N_z^2)}{\partial \omega} \frac{\partial \epsilon_{\perp}}{\partial r} \frac{df_0}{dr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\perp}}{\partial r \partial \omega} \frac{df_0}{dr} + \frac{mf_0}{r\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2)} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}}{\partial \omega} \frac{\partial \varepsilon_2^{(0)}}{\partial r} \\
& + \frac{mf_0}{r(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2)} \frac{\partial^2 \varepsilon_2^{(0)}}{\partial r \partial \omega} - \frac{mf_0}{r\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2)} \frac{\partial \varepsilon_2^{(0)}}{\partial \omega} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}}{\partial r} - \frac{m\varepsilon_2^{(0)}f_0}{r\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2)} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\perp}}{\partial r \partial \omega} \\
& - \frac{m^2 f_0}{r^2 \varepsilon_{\perp}} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}}{\partial \omega} - \frac{m^2 f_0}{r^2(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2)} \frac{\partial(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2)}{\partial \omega} + \frac{2\omega^2 f_0}{c^2(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2)} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}}{\partial \omega} + \frac{2k_{\perp}^2}{\omega} f_0, \\
& \varepsilon_{\perp} = \left(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2\right)^2 - \left(\varepsilon_2^{(0)}\right)^2.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Константа інтегрування  $A^{(2)}$  є малою величиною другого порядку. Коли підставити поправку  $B^{(2)}$  (1.50) до хвильового пакету (1.27), доданок  $A^{(2)}f_0(r)$  виявляється подібним до  $B^{(0)}$ . Тому константа  $A^{(2)}$  визначається не з крайових умов. Для визначення  $A^{(2)}$  необхідно скористатися умовою, аналогічною умові нормування хвильової функції в теорії збурень у квантовій механіці. У нашому випадку ця умова полягає в рівності електромагнітних енергій хвилі, обчислених у нульовому і в другому наближеннях. Разом з тим, вигляд дисперсійного рівняння (1.54) і величина поправки (1.55) не залежать від значення  $A^{(2)}$ .

Скористаємося отриманим результатом для здобуття простих аналітичних оцінок: дослідимо вплив неоднорідності утримуючого магнітного поля стелларатора на дисперсійні властивості МГД хвиль у плазмі з однорідним профілем густини. У цьому випадку рівняння (1.30) для  $B^{(0)}$  можна розв'язати точно, і  $f_0(r) = J_m(k_{\perp}r)$ , де  $J_m(k_{\perp}r)$  – функція Бесселя. Розглянемо поширення аксіально - симетричних ( $m=0$ ) дрібномасштабних ( $k_{\perp}b \gg 1$ ) МГД хвиль у двозахідному стеллараторі ( $l=2$ ) з великим кроком гвинтового провідника ( $k_s b \ll 1$ ). У цьому випадку

$$D^{(0)} = J_0'(k_{\perp}b) = -J_1(k_{\perp}b). \tag{1.59}$$

Для ШМЗХ із частотою вище іонної циклотронної ( $\Omega = \omega / \omega_{ci} \gg 1$ ) і великою аксіальною довжиною хвилі ( $k_z/k \ll (k_{\perp}b/\Omega)^2$ ) розв'язок дисперсійного рівняння має вигляд:

$$\omega_0 \approx j_{1,s} c / (bN_A), \tag{1.60}$$

$$\delta\omega \approx \frac{\epsilon^2}{2(k_S b)^3} \left( \left( \frac{\omega_{pi} b}{c} \right)^2 + \frac{8}{k_S b} \right) \omega_0 . \quad (1.61)$$

Тут  $j_{l,s}$  – s-й корінь функції Бесселя першого порядку,  $J_l(j_{l,s})=0$ .

У випадку альфвенівських хвиль з частотою порядку іонної циклотронної, що поширюються майже уздовж магнітного поля ( $k_z \gg k_A$ ,  $j_{l,s}/b$ ), поправка до частоти

$$\omega_0 \approx [1 - (k_A/k_z)^2] \omega_{ci} , \quad (1.62)$$

має вигляд

$$\frac{\delta\omega}{\omega_{ci}} \approx -\frac{\epsilon^2}{24} \frac{k_z^2}{k_A^2} \left\{ \left( \frac{k_z b}{j_{l,s}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{j_{l,s}}{k_S b} \right)^2 \right\} , \quad (1.63)$$

при цьому передбачається, що  $(k_z/k_A)^2 (k_z b/j_{l,s})^2 (k_S b)^2/24 \gg 1$ .

Підіб'ємо підсумки досліджень, що їх виконано в цьому підрозділі. У ньому досліджено поширення МГД хвиль у тривимірно неоднорідній плазмі прямого стелларатора. Показано, що симетрія утримуючого магнітного поля і малість струму в гвинтових провідниках дають можливість звести задачу про власні МГД коливання тривимірно неоднорідної плазми стелларатора до одновимірно (радіально) неоднорідної задачі, розв'язок якої добре відомий. У випадку відсутності альфвенівського резонансу знайдений розподіл ВЧ полів з урахуванням малих доданків другого порядку (див. (1.33)-(1.36), (1.39)-(1.42)). Визначено поправку  $\delta\omega$  (1.55) до власної частоти МГД хвиль, що виявилася величиною другого порядку малості за параметром  $\epsilon$  (див. (1.3)), що характеризує малість струму в гвинтових провідниках у порівнянні зі струмом у котушках тороїдного магнітного поля. Отримано наочні асимптотичні вирази (1.61), (1.53) для поправки  $\delta\omega$  у випадку однорідного профілю густини плазми, умови малості яких  $|\delta\omega| \ll \omega_0$  дають можливість оцінити застосовність моделі прямого магнітного поля для дослідження МГД хвиль у стеллараторі.

## 1.2. Розщеплення спектрів МГД коливань плазми гвинтовою неоднорідністю зовнішнього магнітного поля

В цьому підрозділі досліджені власні МГД коливання неоднорідного плазмового циліндра в резонансному випадку [151, 176, 177], коли аксіальна довжина основної гармоніки вдвічі перевищує крок гвинтового провідника, і її азимутальний номер є вдвічі менший за мультиполярність стелларатора,

$$k_s = 2k_z, \quad l = -2m. \quad (1.64)$$

Резонансні умови (1.64) можуть бути реалізовані в стеллараторі з парною мультиполярністю і парною кількістю періодів магнітного поля. Як видно з Табл. 1.1, яку взято з [178], парна мультиполярність є властивою для багатьох стеллараторів, побудованих у різних країнах. Спираючись на наведені в Табл.1.1 дані, подальший розгляд проведено для випадку двозахідного стелларатора (торсатрона).

Таблиця 1.1

№ з/п	Назва стелларатора	Місто	Країна	Західність	Кількість періодів поля
1	«Ливень-2»	Москва	СРСР	2	14
2	ATF	Ок-Рідж	США	2	12
3	CHS	Нагоя	Японія	2	8
4	Ураган-2М	Харків	Україна	2	4

Малість магнітного поля гвинтової обмотки дозволяє використовувати теорію збурень для випадку вироджених спектрів. При цьому досить обмежитись врахуванням доданків першого порядку малості. (Розщеплення спектрів МГД коливань плазми в гофрованому магнітному полі досліджено в [158, 179].)

За умови нехтування зіткненнями між частинками плазми, інерцією електронів і ефектом скінченності ларморівського радіуса іонів виводимо з рівнянь (1.15) – (1.17) наступну систему рівнянь для компонентів магнітного поля  $\vec{B} = (B_r, B_\theta, B_z)$  і електричного поля  $E_r$  і  $E_\theta$  в циліндричних координатах для випадку двозахідного стелларатора:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial B_\vartheta}{\partial z} \right] + \bar{\Delta}_2 \sin(2\theta) \left[ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] - \alpha r \bar{\Delta}_2 \sin(2\theta) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta} \right] =$$

$$= \frac{\omega \varepsilon_1}{ic} \{E_r + E_\vartheta \bar{\Delta}_2 \sin(2\theta)\} + \frac{\omega \varepsilon_2}{c} \{-E_r \bar{\Delta}_2 \sin(2\theta) + E_\vartheta\}, \quad (1.65)$$

$$- \bar{\Delta}_2 \sin(2\theta) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial B_\vartheta}{\partial z} \right] + \left[ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] - \Delta_2 \cos(2\theta) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta} \right] =$$

$$= \frac{\omega \varepsilon_1}{ic} \{-E_r \bar{\Delta}_2 \sin(2\theta) + E_\vartheta\} - \frac{\omega \varepsilon_2}{c} \{E_r + E_\vartheta \bar{\Delta}_2 \sin(2\theta)\}, \quad (1.66)$$

$$B_r = \frac{ic}{\omega r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [E_r \alpha r \bar{\Delta}_2 \sin 2\theta + E_\vartheta \Delta_2 \cos 2\theta] + \frac{ic}{\omega} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial z}, \quad (1.67)$$

$$B_\vartheta = \frac{c}{i\omega} \frac{\partial E_r}{\partial z} + \frac{c}{i\omega} \frac{\partial}{\partial r} [E_r \alpha r \bar{\Delta}_2 \sin 2\theta + E_\vartheta \Delta_2 \cos 2\theta], \quad (1.68)$$

$$B_z = \frac{c}{i\omega r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\vartheta) + \frac{ic}{\omega r} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta}. \quad (1.69)$$

Тут введено позначення

$$\bar{\Delta}_n = \frac{nb_n I'_n(k_s r)}{B_0 \alpha r}, \quad \Delta_n = \frac{nb_n I_n(k_s r)}{B_0 \alpha r}, \quad (1.70)$$

Виходячи з симетрії задачі (див. співвідношення (1.7)) шукаємо розв'язок системи рівнянь (1.65) – (1.69) для аксіальної компоненти магнітного поля МГД хвилі відповідно до відомої процедури здобуття секулярного рівняння (застосування теорії збурень у випадку виродженого спектра) в наступному вигляді:

$$B_z = \left[ (C_0^{(+)} \psi_1^{(0)}(r) + C_1^{(+)} \psi_1^{(+)}(r)) e^{i\theta} + (C_0^{(-)} \psi_1^{(0)}(r) + C_1^{(-)} \psi_1^{(-)}(r)) e^{-i\theta} + \right.$$

$$\left. C_3^{(+)} \psi_3^{(+)}(r) e^{3i\theta} + C_3^{(-)} \psi_3^{(-)}(r) e^{-3i\theta} \right] \exp(-i\omega t), \quad (1.71)$$

де  $|C_{l,3}^{(\pm)} \psi_{l,3}^{(\pm)}| \sim |A_2 C_0^{(\pm)} \psi_1^{(0)}|$ . Інші компоненти магнітного і електричного полів МГД хвилі представимо у вигляді, що є аналогічним до (1.71).

Обговоримо розв'язання системи рівнянь (1.65) – (1.69) у цьому резонансному випадку в нульовому наближенні. За відсутності струму у гвинтових провідниках ( $\epsilon=0$ ) радіальна залежність аксіальної компоненти магнітного поля МГД хвилі  $\psi_j^{(0)}(r)$  ( $j=1,3$ ) визначається наступним рівнянням:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{k_j^2} \frac{\partial \psi_j^{(0)}}{\partial r} + q_j \psi_j^{(0)} = 0, \quad (1.72)$$

де

$$q_j \equiv q(j\alpha, r) = 1 - \frac{m^2}{k_j^2 r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_j}{k_j^2} \right), \quad (1.73)$$

$$k_j^2 \equiv k_{\perp}^2(j\alpha, r) = (\omega / c)^2 (\varepsilon_l^{(0)} - j^2 N_z^2) (1 - \mu_j^2), \quad (1.74)$$

$$\mu_j \equiv \mu(j\alpha, r) = \varepsilon_2^{(0)} / (\varepsilon_1^{(0)} - j^2 N_z^2). \quad (1.75)$$

Тут  $N_z = c\alpha/\omega$  - аксіальний показник заломлення для основної гармоніки.

Розв'язки задачі в нульовому наближенні, тобто обмежені при  $r=0$  розв'язки  $\psi_j^{(0)}(r)$  рівняння (1.72) і такі, що мають при  $r=0$  особливість, розв'язки  $\tilde{\psi}_j^{(0)}(r)$ , які відповідають хвилям з аксіальним хвильовим числом  $(j\alpha)$ , вважаємо відомими. Розподіл ВЧ полів МГД хвиль в плазмовому циліндрі з радіально неоднорідним профілем густини можна отримати з (1.72) аналітичними (за умови виконання певних спрощуючих припущень) і числовими методами (див., напр., [13, 175]).

Профіль густини обираємо таким, щоб основний АР, в якому

$$\varepsilon_l^{(0)}(r) = N_z^2, \quad (1.76)$$

а також сателітний АР [149, 180, 181] були відсутні. В цьому випадку функції  $\psi_j^{(0)}(r)$  і  $\tilde{\psi}_j^{(0)}(r)$  можуть бути обрані дійсними.

Дисперсійне рівняння МГД коливань однорідного плазмового циліндра в аксіальному магнітному полі добре відоме,

$$0 = \frac{\kappa_1}{k_1^2} \left[ \frac{1}{\psi_1^{(0)}} \frac{d\psi_1^{(0)}}{dr} + \frac{m\mu_1}{r} \right]_{|a_p} + \frac{I'_m(\kappa_1 a) K'_m(\kappa_1 a_p) - K'_m(\kappa_1 a) I'_m(\kappa_1 a_p)}{I'_m(\kappa_1 a) K_m(\kappa_1 a_p) - K'_m(\kappa_1 a) I_m(\kappa_1 a_p)}. \quad (1.77)$$

Тут  $\kappa_j^2 = j^2 \alpha^2 - \omega^2 / c^2$ ,  $r=a_p$  - це поверхня поділу плазма - вакуум. Якщо плазма повністю заповнює металеву камеру, дисперсійне рівняння зводиться до обернення на нуль виразу в квадратних дужках в (1.77). Рівняння (1.77) може бути розв'язане або числовими (у загальному випадку) або аналітичними методами (за умови виконання певних спрощуючих припущень). Розв'язок рівняння (1.77)  $\omega=\omega_0$ , який слугує нульовим наближенням для МГД коливань плазми стеллара-

тора, будемо вважати відомим.

Проаналізуємо дисперсійне рівняння (1.77) з метою визначення тих МГД хвиль, для яких ефектом невзаємності (різницею між власними частотами, що обумовлена протилежністю знака азимутального номера моди) можна знехтувати. Відзначимо передовсім той факт, що гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля призводить до зачеплення гармонік з різними азимутальними номерами. Це виключає з нашого розгляду аксіально симетричні ( $m=0$ ) коливання. З (1.77) видно, що ефект невзаємності є слабким (другий доданок в квадратних дужках в (1.77) є нехтовно малим) для дрібномасштабних МГД коливань (коли вздовж радіусу плазми вкладається багато довжин хвиль), а також для низькочастотних коливань (коли  $|\varepsilon_2^{(0)}| \ll |(\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2)|$ ). Дійсно, власні аксіально несиметричні МГД коливання, наприклад, однорідного тонкого ( $\kappa_l a_p \ll 1$ ,  $k_l a_p \ll 1$ ) плазмового шнура, відокремленого від металевої камери вузьким ( $a - a_p \ll a$ ) вакуумним прошарком, поширюються лише з від'ємними азимутальними номерами ( $m < 0$ ). А от для дрібномасштабних швидких магнітозвукових коливань однорідного плазмового циліндра, що поширюються майже перпендикулярно до магнітного поля ( $k_l \approx k_A \gg \kappa_l$ ), ефект невзаємності виявляється слабким,

$$\frac{\omega_0(+|m|) - \omega_0(-|m|)}{\omega_0} \approx \frac{2(1 + \omega / \omega_{ci})|m|}{(\pi n_r)^2}, \quad (1.78)$$

де  $n_r$  - кількість напівдовжин хвиль, які вкладаються вздовж радіусу плазми. Саме для цих хвиль з азимутальним номером  $m = \pm l$  і аксіальним хвильовим числом  $k_z = \mp \alpha$  слід очікувати на розщеплення власної частоти неоднорідністю утримуючого магнітного поля стелларатора.

Розв'яжемо систему рівнянь (1.65) – (1.69) у першому наближенні. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння для амплітуд  $\psi_j^{(\pm)}(r)$  дістанемо, підставивши компоненти  $E_{r,g}$  електричного і  $B_{r,g,z}$  магнітного полів МГД хвилі у вигляді (1.71) до системи рівнянь (1.65) – (1.69) і виділивши в ній доданки  $\propto \exp(ij\alpha z)$ . Ці рівняння для  $\psi_j^{(\pm)}(r)$  мають вигляд

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\partial r} + q_j \right) C_j^{(\pm)} \psi_j^{(\pm)} = -\hat{G}_j^{(\pm)} C_0^{(\pm)} \psi_1^{(0)}, \quad (1.79)$$

де оператор  $\hat{G}_j^{(\pm)}$  визначається в наступний спосіб:

$$\hat{G}_j^{(\pm)} C_0^{(\pm)} \psi_1^{(0)} = \frac{\omega}{c r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{k_j^2} (F_j^{(\pm)} + \mu_j A_j^{(\pm)}) \right] + \frac{\omega m}{c r k_j^2} (A_j^{(\pm)} + \mu F_j^{(\pm)}). \quad (1.80)$$

Величини  $A_j^{(\pm)}$  і  $F_j^{(\pm)}$ , що входять до (1.80), для  $j=3$  дорівнюють

$$\begin{aligned} A_j^{(\pm)} = & \frac{-j}{2} N^2 E_r^{(\pm)} \frac{d}{d r} (r \bar{\Delta}) - (j-1) N^2 r \bar{\Delta} \frac{d E_r^{(\pm)}}{d r} + \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{2} E_r^{(\pm)} + \frac{i \varepsilon_2^{(1)}}{2} E_\varphi^{(\pm)} \\ & \pm \frac{j c N}{2 i \omega} \frac{d}{d r} (\Delta E_\varphi^{(\pm)}) \mp \frac{\bar{\Delta} \varepsilon_2^{(0)}}{2} E_r^{(\pm)} \mp \frac{i \varepsilon_l^{(0)} \bar{\Delta}}{2} E_\varphi^{(\pm)} \pm \frac{\bar{\Delta} c}{2 \omega} \frac{d}{d r} C_0^{(\pm)} \psi_l^{(0)}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} F_j^{(\pm)} = & \mp \frac{j^2 N^2 \bar{\Delta}}{2} E_r^{(\pm)} - \frac{j^2 N c \Delta i}{2 \omega r} E_\varphi^{(\pm)} \pm \frac{\varepsilon_l^{(0)}}{2} \bar{\Delta} E_r^{(\pm)} - \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} E_r^{(\pm)} - \frac{i}{2} \varepsilon_1^{(1)} E_\varphi^{(\pm)} \\ & \pm \frac{i}{2} \varepsilon_2^{(0)} \bar{\Delta} E_\varphi^{(\pm)} + \frac{\bar{\Delta} c}{2 \omega r} C_0^{(\pm)} \psi_l^{(0)} \mp \frac{\bar{\Delta}}{2} N^2 E_r^{(\pm)} \mp \frac{\Delta c N}{2 \omega} \frac{d}{d r} E_r^{(\pm)} - \frac{i c \Delta N}{2 \omega r} E_\varphi^{(\pm)}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Тут і в подальшому індекс 2 у величин  $\Delta_n$  і  $\bar{\Delta}_n$  - опустимо для спрощення запису.

Для визначення малої поправки першого порядку до амплітуди основних гармонік  $\psi_j^{(\pm)}(r)$  скористаємось для  $A_j^{(\pm)}$  і  $F_j^{(\pm)}$  виразами (1.81) і (1.82), в яких слід покласти  $j=l$  і всюди в правій частині замінити горішні індекси  $(\pm) \rightarrow (\mp)$ . Амплітуди основних гармонік радіального  $E_{r0}^{(\pm)}$  і азимутального  $E_{90}^{(\pm)}$  компонентів електричного поля дорівнюють

$$E_{r0}^{(\pm)} = C_0^{(\pm)} u^{(\pm)}(r) - \frac{\omega^2}{c^2 k_l^2} (A_l^{(\pm)} + \mu_l F_l^{(\pm)}), \quad (1.83)$$

$$E_{90}^{(\pm)} = i C_0^{(\pm)} v^{(\pm)}(r) - \frac{i \omega^2}{c^2 k_l^2} (F_l^{(\pm)} + \mu_l A_l^{(\pm)}), \quad (1.84)$$

де

$$u^{(\pm)}(r) = \frac{-\omega}{c k_l^2} \left( \frac{\pm 1}{r} \psi_1^{(0)} + \mu_1 \frac{\partial \psi_1^{(0)}}{\partial r} \right), \quad (1.85)$$

$$v^{(\pm)}(r) = \frac{-\omega}{c k_l^2} \left( \frac{\pm \mu_1}{r} \psi_1^{(0)} + \frac{\partial \psi_1^{(0)}}{\partial r} \right). \quad (1.86)$$



Для обчислення оператора  $\hat{G}_j^{(\pm)}$  в (1.79) досить взяти амплітуди  $E_{r0}^{(\pm)}$  і  $E_{90}^{(\pm)}$  з точністю до доданків нульового порядку за  $\Delta$ .

Обмежені при  $r=0$  розв'язки рівняння (1.79) мають вигляд

$$C_j^{(\pm)}\psi_j^{(\pm)} = H_j^{(\pm)}\psi_j^{(0)} + \psi_j^{(0)} \int_r^{ap} W_j^{-1} k_j^2 \tilde{\psi}_j^{(0)} \hat{G}_j^{(\pm)} C_0^{(\pm)} \psi_l^{(0)} dr - \tilde{\psi}_j^{(0)} \int_0^r W_j^{-1} k_j^2 \psi_j^{(0)} \hat{G}_j^{(\pm)} C_0^{(\pm)} \psi_l^{(0)} dr, \quad (1.87)$$

де вронскіан  $W_j$  дорівнює,  $W_j = \psi_j^{(0)} \frac{d\tilde{\psi}_j^{(0)}}{dr} - \tilde{\psi}_j^{(0)} \frac{d\psi_j^{(0)}}{dr}$ . Константи інтегрування

$H_3^{(\pm)} \sim \Delta C_0^{(\pm)}$  визначаються з умови обернення на нуль амплітуд  $E_{91}^{(\pm)}$  сателітних (пропорційних до  $\exp(\pm 3i\theta)$ ) гармонік азимутального електричного поля МГД хвилі на металевій поверхні камери,  $E_{91}^{(\pm)}(a) = 0$ , де

$$E_{91}^{(\pm)} = \frac{\omega^2}{ic^2 k_3^2} \left( \frac{c}{\omega} C_3^{(\pm)} \frac{\partial \psi_3^{(\pm)}}{\partial r} + F_3^{(\pm)} \right) - \frac{i\mu_3 \omega^2}{c^2 k_3^2} \left( \frac{cm}{\omega r} C_3^{(\pm)} \psi_3^{(\pm)} + A_3^{(\pm)} \right). \quad (1.88)$$

Константи інтегрування  $H_l^{(\pm)} \sim \Delta C_0^{(\pm)}$  визначаються з умови

$$\int_0^a \psi_l^{(0)} C_l^{(\pm)} \psi_l^{(\pm)} r dr = 0, \quad (1.89)$$

яка означає, що енергія магнітного поля (1.71) МГД хвилі, що обчислена з урахуванням доданків першого порядку малості за  $\Delta$ , співпадає зі значенням, що обчислено в нульовому наближенні. В квантовій механіці [58] ця вимога відповідає виконанню умови нормування хвильової функції.

Проаналізуємо дисперсійне рівняння МГД хвиль в стеллараторі, що є повністю заповнений плазмою. Тобто припустимо спочатку, що плазма повністю заповнює об'єм камери, яка має форму граничної магнітної поверхні

$$r = a(1 + 0,5\bar{\Delta}(a)\cos(2\theta)). \quad (1.90)$$

Виділення в крайовій умові на металевій поверхні основних (пропорційних до  $\exp(\pm i\theta)$ ) гармонік призводить до дисперсійного рівняння

$$D^{(0)2} - D^{(+)} D^{(-)} = 0, \quad (1.91)$$

де

$$D^{(0)} = \left\{ \frac{c}{\omega} \frac{\partial \psi_1^{(0)}}{\partial r} + \mu_1 \psi_1^{(0)} \right\} \Big|_{r=a}, \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} D^{(\pm)} = & -\frac{\bar{\Delta} a c k_1^2}{4\omega} \frac{dv^{(\mp)}}{dr} - \frac{\bar{\Delta} c^2 k_1^2 u^{(\mp)}}{2\omega^2} - \frac{c}{\omega} \frac{d\tilde{\psi}_1^{(0)}}{dr} \int_0^{a_p} w_1^{-1} k_1^2 \psi_1^{(0)} \hat{G}_1^{(\pm)} \psi_1^{(0)} dr \\ & + u^{(\pm)} \left[ \mp \bar{\Delta} N^2 \pm \frac{\varepsilon_1^{(0)} \bar{\Delta}}{2} - \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} + \frac{\mu_1 \varepsilon_1^{(1)}}{2} \mp \frac{\mu_1 \bar{\Delta} \varepsilon_2^{(0)}}{2} - \frac{\mu_1}{2} N^2 \frac{d}{dr} (r \bar{\Delta}) \right] - \frac{\bar{\Delta} c \psi_1^{(0)}}{2\omega r} \pm \frac{\Delta c N}{2\omega} \frac{du^{(\pm)}}{dr} \\ & \pm \frac{\mu_1 N c}{2\omega} \frac{d}{dr} (\Delta v^{(\mp)}) \pm \frac{\mu_1 \bar{\Delta} c}{2\omega} \frac{d\psi_1^{(0)}}{dr} \Big|_{r=a}. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Власну частоту МГД хвиль знайдемо з розв'язання дисперсійного рівняння (1.91) у вигляді

$$\omega = \omega_0 \pm \delta\omega. \quad (1.94)$$

Поправка  $\delta\omega$  до власної частоти, яка обумовлена гвинтовою неоднорідністю зовнішнього магнітного поля, дорівнює

$$\delta\omega = (D^{(+)} D^{(-)})^{1/2} \left( \frac{\partial D^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (1.95)$$

У випадку, коли вигляд залежності  $D^{(0)}(\omega)$  аналітично не задано, наприклад, коли розподіл полів  $\psi_1^{(0)}$  і  $\tilde{\psi}_1^{(0)}$  знаходять числовими способами, похідна  $\left( \frac{\partial D^{(0)}}{\partial \omega} \right)$ , що входить до (1.95), може бути порохована [32] за теорією збурень (див. (1.57)).

Скористаємось здобутими результатами для дослідження впливу гвинтової неоднорідності утримуючого магнітного поля на частоту дрібномасштабних швидких магнітозвукових хвиль, що розповсюджуються в плазмі з однорідним профілем густини. В цьому випадку розв'язок рівняння (1.72) виражається через функцію Бесселя першого порядку,  $\Psi_1^{(0)} = J_1(k_1 r)$ . Частота  $\omega_0$  задається в цьому випадку виразом (1.60). Для цих хвиль поправка до частоти дорівнює

$$\delta\omega = 0,25 \bar{\Delta}(a) \omega_0. \quad (1.96)$$

Дослідимо дисперсійне рівняння МГД хвиль в плазмовому циліндрі, відокремленому від камери вакуумним прошарком. В сучасних стеллараторах реалізація можливості, коли плазма повністю заповнює металеву камеру стелларатора,

вбачається малоюмовірною через наступні три причини. По-перше, перед тим, як плазма повністю заповнить об'єм стелларатора, відбуваються кілька попередніх етапів, пов'язаних із створенням і нагріванням плазми, протягом яких може статись зривання розряду. По-друге, створення металевої камери, яка б мала форму граничної магнітної поверхні, супроводжується великими технічними проблемами. Хоча такі камери і споруджуються, наприклад, для стелларатора «Wendelstein-VII-X» в Грайфсвальді, Німеччина [182], також існують і пристрої з круглим полоїдним перерізом, наприклад, «Ураган-2М» в Інституті фізики плазми Національного Наукового Центра «Харківський фізико - технічний інститут», Україна. В цьому випадку середній радіус  $r_0$  магнітних поверхонь, які не торкаються камери, також менший за радіус камери  $a$ ,  $r_0 \leq a(1 - 0,5\bar{\Delta}(a))$ . По-третє, магнітна конфігурація стелларатора передбачає наявність сепаратиси, і радіус  $a_p$  граничної замкнутої магнітної поверхні знов-таки менший за радіус камери.

Тому слід дослідити вплив неоднорідності магнітного поля на дисперсійні властивості МГД хвиль в плазмовому шнурі, відокремленому від круглої циліндричної камери вакуумним зазором. Нехай гранична магнітна поверхня описується рівнянням

$$r = a_p (1 + 0,5\bar{\Delta}(a_p) \cos(2\theta)). \quad (1.97)$$

Залежність аксіальної компоненти магнітного поля МГД хвилі в вакуумі, що задовольняє крайовій умові на металевій камері, має вигляд

$$B_z = [P_0^{(+)} g_1(r) e^{i\theta} + P_0^{(-)} g_1(r) e^{-i\theta} + P_1^{(+)} g_3(r) e^{3i\theta} + P_1^{(-)} g_3(r) e^{-3i\theta}] \exp(-i\omega t), \quad (1.98)$$

де

$$g_j(r) \equiv K'_j(\kappa_j a) I_j(\kappa_j r) - I'_j(\kappa_j a) K_j(\kappa_j r). \quad (1.99)$$

Дотримання крайових умов на граничній магнітній поверхні (1.97) призводить до дисперсійного рівняння у вигляді (1.91), в якому

$$D^{(0)} = \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1, \quad (1.100)$$

$$D^{(\pm)} = \alpha_1 \delta_2 - \beta_1 \gamma^{(\pm)}_2 + \alpha^{(\pm)}_2 \delta_1 - \beta^{(\pm)}_2 \gamma_1, \quad (1.101)$$

$$\alpha_1 = v(a_p), \quad \beta_1 = \frac{-\omega}{c \kappa_1^2} \frac{dg_1}{dr} \Big|_{r=a_p}, \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{(\pm)} = & \frac{a\bar{\Delta}}{4} \frac{dv}{dr} + \frac{\bar{\Delta}}{2} u^{(\mp)} - \frac{c}{\omega N_{\perp}^2} \frac{d\tilde{\psi}_1^{(0)}}{dr} \int_0^r \frac{\psi_1^{(0)} R^{(\mp)} B_z^{(\mp)}}{C_0^{(\mp)} W_1} dr \mp \frac{\mu_1 c \tilde{\psi}_1^{(0)}}{\omega r N_{\perp}^2} \int_0^r \frac{\psi_1^{(0)} R^{(\mp)} B_z^{(\mp)}}{C_0^{(\mp)} W_1} dr \\
& + \frac{1}{N_{\perp}^2} \left\{ \pm \bar{\Delta} N^2 u^{(\mp)} \mp \frac{\varepsilon_1^{(0)} \bar{\Delta}}{2} + \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} u^{(\mp)} + \frac{c\Delta}{2\omega r} \psi_1^{(0)} \mp \frac{\Delta c N}{2\omega} \frac{du^{(\mp)}}{dr} - \frac{Nc\Delta v}{\omega r} - \frac{\varepsilon_1^{(1)} v}{2} \pm \frac{\varepsilon_2^{(0)} \bar{\Delta}}{2} v \right\} \\
& + \frac{\mu_1}{N_{\perp}^2} \left\{ \frac{-\varepsilon_1^{(1)}}{2} u^{(\mp)} \pm \frac{\bar{\Delta} \varepsilon_2^{(0)} u^{(\mp)}}{2} \mp \frac{\alpha c^2}{2\omega^2} \frac{d}{dr} (\Delta v) \mp \frac{\bar{\Delta} c}{2\omega} \frac{d\psi_1^{(0)}}{dr} \right. \\
& \left. + \frac{N^2}{2} u^{(\mp)} \frac{d}{dr} (r\bar{\Delta}) \mp \frac{\varepsilon_1^{(0)} \bar{\Delta}}{2} v + \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} v \right\} \Big|_{r=a_p}, \quad (1.103)
\end{aligned}$$

$$\gamma_l = \Psi^{(0)}{}_l(a_p), \quad \beta_2^{(\pm)} = \frac{\omega}{c\kappa_1^2} \frac{r\bar{\Delta}}{4} \frac{d^2 g_1}{dr^2} \pm \frac{\bar{\Delta} \omega g_1}{2rc\kappa_1^2} \Big|_{r=a_p}, \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2^{(\pm)} = & \tilde{\psi}_1^{(0)} \int_0^r \frac{\psi_1^{(0)} R^{(\mp)} B_z^{(\mp)}}{c_0^{(\mp)} w_1} dr + \frac{N\omega\psi_1^{(0)}}{2rek_{\perp}^2} (\Delta \mp \bar{\Delta} \alpha r \mu_1) + \\
& + \frac{d\psi_1^{(0)}}{dr} \left( \frac{\bar{\Delta} r}{4} \mp \frac{\Delta N \omega \mu_1}{2ck_{\perp}^2} + \frac{\bar{\Delta} N^2 r}{2N_{\perp}^2} \right) \Big|_{r=a_p}, \quad (1.105)
\end{aligned}$$

$$\delta_l = -\gamma_l(a_p), \quad \delta_2 = \frac{N^2 + 1}{N^2 - 1} \frac{r\bar{\Delta}}{4} \frac{dg_1}{dr} + \frac{\Delta N \omega g_1}{2rc\kappa_1^2} \Big|_{r=a_p}. \quad (1.106)$$

Дослідимо на основі формул (1.95) і (1.100) - (1.106) розщеплення спектрів магнітозвукових коливань великого плазмового циліндра, відокремленого від круглої металевої камери вузьким ( $|m|(a-a_p) \ll a$ ) вакуумним шаром. Для ШМЗХ, які розповсюджуються майже перпендикулярно до магнітного поля,  $k_A^2 \gg \kappa_1^2$ , частота дорівнює

$$\omega_0 = \pi n_r \frac{\omega_{ci}^{(0)} c}{\omega_{pi} a} \left( 1 - \frac{k_A (a - a_p)}{\pi n_r} \right), \quad (1.107)$$

де альфвенівське хвильове число дорівнює  $k_A = \omega_{pi}/(c\omega_{ci})$ . Вираз для поправки, яка обумовлена гвинтовою неоднорідністю магнітного поля, має для таких ШМЗХ наступний вигляд:

$$\delta\omega = 0.25 k_1^2 (a - a_p)^2 \bar{\Delta}(a_p) \omega_0. \quad (1.108)$$

Розщеплення частоти ШМЗХ (1.108) є слабшим за те, що обчислено в поперед-

ньому випадку (1.96). Це пов'язано, по-перше, з тим, що малий параметр задачі  $\bar{\Delta}$  (1.70) різко (майже експоненціально) зменшується із зменшенням радіусу,  $\bar{\Delta}(a_p) < \bar{\Delta}(a)$ . Це послаблення пояснюється також тим, що основний внесок до величини  $\delta\omega$  (1.96) вносить кривина металевої камери, тоді як в другому випадку (1.108) камера вважається круглою.

Якщо плазмовий шнур відокремлений від металевої камери широким ( $\kappa_1(a-a_p) \gg 1$ ) вакуумним прошарком, то поправка (1.95) до частоти МГД хвиль стає експоненціально малою. Частота ШМЗХ дорівнює в цьому випадку

$$\omega_0 = (v_A/a_p)(j_{1,k} + \kappa_1/k_A). \quad (1.109)$$

Поправка до частоти таких ШМЗХ, обумовлена гвинтовою неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , визначається наступним простим виразом:

$$\delta\omega = 0.25\bar{\Delta}(a_p)\omega_0. \quad (1.110)$$

Підіб'ємо підсумки. Проведене в цьому підрозділі дослідження впливу гвинтової неоднорідності утримуючого магнітного поля на власні моди і власні частоти МГД хвиль з резонансними (1.64) значеннями аксіального хвильового числа і азимутального номера моди дозволяє зробити наступні висновки.

Показано, що в резонансному випадку гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля призводить до розщеплення власних частот МГД хвиль,  $\omega = \omega_0 \pm \delta\omega$ , якщо для цих хвиль ефект невзаємності є слабким. При цьому доданки  $\delta\omega$  до частот виявляються величинами першого порядку малості на відміну від нерезонансного випадку, коли вони є величинами другого порядку малості.

Показано, що власними модами в резонансному випадку є стоячі хвилі. Пучності (вузли) стоячої хвилі з більшою частотою  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ , (з меншою частотою  $\omega = \omega_0 - \delta\omega$ ) розташовані там, де максимальна (мінімальна) напруженість утримуючого магнітного поля. Це пояснюється тим, що власні частоти АХ і ШМЗХ в однорідному магнітному полі тим більші, чим сильніше  $|\vec{B}_0|$ .

Внаслідок додавання двох власних стоячих хвиль з близькими частотами  $\omega = \omega_0 \pm \delta\omega$  виникають биття. Частота цих биттів  $\delta\omega$  залежить як від зовнішніх па-

раметрів ( $J, \omega_{ci}, L, a_p, a$ ), так і від густини плазми ( $k_A^2 \propto n$ ). Тому вимірювання частоти биттів з аксіальним періодом  $2L$  може бути використано для діагностики густини плазми.

Досліджене тут розщеплення частоти МГД хвиль гвинтовим магнітним полем можна спостерігати експериментально. Аналогічний ефект зняття виродження відносно знаку аксіального хвильового числа спектрів МГД коливань у токамаках, викликаного поздовжнім електричним струмом, було експериментально знайдено (див., напр., [183]).

Відзначимо також, що в неоднорідній плазмі стеллараторів сателітні альфвенівські резонанси (див. підрозділ 1.3), в яких відбувається конверсія обох сателітних гармонік МГД хвиль, пропорційних  $\exp(\pm 3i\theta)$ , в дрібномасштабні кінетичні хвилі, розташовані в глибині плазми, де густина в 9 раз вища, ніж в основному альфвенівському резонансі (1.76). Це дає підстави [149, 180] передбачати істотне додаткове нагрівання плазми стеллараторів поблизу сателітних альфвенівських резонансів МГД хвиль, основна гармоніка яких  $\propto \exp(\pm i\theta)$ .

Здобуті в цьому підрозділі результати можуть бути корисними також і для вивчення дисперсійних властивостей МГД хвиль, основна гармоніка яких  $\exp(\pm 3i\theta - i\omega t)$  характеризується аксіальним хвильовим числом і азимутальним номером моди, які втричі перевищують резонансне значення (1.64). При дослідженні впливу гвинтової неоднорідності утримуючого магнітного поля на властивості таких хвиль [161, 173] ми залишали лише перший, основний, доданок в повному виразі [169] для магнітного поля

$$B_{0r} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\Delta}_n B_0 \alpha r \sin(n\theta), \quad B_{0\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_n B_0 \cos(n\theta),$$

$$B_{0z} = B_0 - \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_n B_0 \alpha r \cos(n\theta), \quad (1.111)$$

де  $n=(2j+1)l$ , оскільки амплітуди наступних гармонік в (1.111) швидко зменшуються із зростанням  $j$ . Врахування поряд з основним, нерезонансним, доданком з  $j=0$  резонансного доданку з  $j=1$  призведе в цьому випадку до виникнення поправки  $\delta\omega \propto \bar{\Delta}_{j=1}$ , величина якої визначається виразом (1.95), в той час, як основний

доданок (нерезонансний) дає поправку до власної частоти  $\delta\omega \propto \bar{\Delta}_{j=0}^2$ . Таким чином, числові значення цих двох поправок можуть виявитись приблизно однаковими.

### 1.3. Додаткове нагрівання плазми поблизу сателітних альфвенівських резонансів у стеллараторі

Наявність гвинтової симетрії в прямому стеллараторі (торсатроні) призводить, як показано в [149, 180], до того, що поряд з основним АР,  $r=r_A^{(0)}$  (див. (1.76)), можуть існувати додаткові резонанси,  $r=r_A^{(\pm)}$ , у яких

$$\varepsilon_l^{(0)}(r) = (N_z \pm N_s)^2. \quad (1.112)$$

Поблизу резонансів (1.112) відбуваються зростання амплітуд сателітних гармонік електричних і магнітних полів МГД хвиль і конверсія цих коливань у дрібномасштабні "кінетичні" альфвенівські хвилі. Ці резонанси природно назвати сателітними альфвенівськими резонансами (САР). Незважаючи на те, що ВЧ потужність, що поглинається поблизу САР, є величиною, квадратичною за параметром

$$\varepsilon_h^{(1)} \equiv 8Jk_s^2 a K'_l(k_s a) I_l(k_s r) / (cB_0), \quad (1.113)$$

величина якого тут вважається малою ( $|\varepsilon_h^{(1)}| \ll 1$ ), можливими є ситуації, коли досліджений ефект може бути істотним для нагрівання плазми.

При нехтуванні зіткненнями, інерцією електронів і ефектом скінченності ларморівського радіуса іонів одержуємо з рівнянь Максвелла систему рівнянь (1.65) – (1.69) для компонентів магнітного поля  $\vec{B} = (B_r, B_\theta, B_z)$  і електричного поля  $E_r$  і  $E_\theta$  у циліндричних координатах. Умова слабкості магнітного поля гвинтової обмотки ( $\varepsilon_h^{(1)} \ll 1$ ) дозволяє скористатися теорією збурень для розв'язання поставленої задачі і, зокрема, знайти розв'язок системи рівнянь (1.65) – (1.69) для аксіального компонента магнітного поля хвилі з точністю до доданків першого порядку малості за  $\varepsilon_h^{(1)}$  в наступному вигляді:

$$B_z = [B^{(0)}(r) + B^{(+)}(r)\exp(i l \theta) + B^{(-)}(r)\exp(-i l \theta)] \exp[i(k_z z + m \vartheta - \omega t)], \quad (1.114)$$

де  $|B^{(\pm)}| \sim |\varepsilon_h^{(l)} B^{(0)}|$ .

За відсутності струму в гвинтових провідниках ( $\varepsilon_h^{(l)} = 0$ ) залежність аксіального компонента магнітного поля хвилі  $B^{(0)}(r)$  визначається рівнянням (1.30). Розв'язання задачі про розподіл ВЧ полів з  $\omega < \omega_{ci}$  у плазмовому циліндрі з радіально неоднорідним профілем густини, поміщеному в однорідне аксіальне постійне магнітне поле, можна знайти (див. [13, 175] і наступні численні роботи) добре апробованими числовими методами. Тому обмежений при  $r=0$  розв'язок рівняння (1.30)  $B^{(0)}(r) = \psi(k_z, m, r)$  вважаємо відомим.

Представлення інших компонентів магнітних і електричних полів хвилі у вигляді рядів за ступенями  $\varepsilon_h^{(l)}$  є аналогічними до (1.114).

Радіальний і азимутальний компоненти електричного поля хвилі в нульовому наближенні визначаються виразами (1.28).

Поза областями САР (1.112) амплітуди сателітних гармонік  $B^{(\pm)}(r)$  знайдемо, нехтуючи зіткненнями, інерцією електронів і ефектом скінченного ларморовського радіуса іонів  $\rho_{Li} = v_{Ti} / \omega_{ci}$  ( $v_{Ti} = \sqrt{T_i / m_i}$  - теплова швидкість іонів,  $T_i$  - їхня температура) за теорією збурень. Диференціальне рівняння другого порядку для  $B^{(\pm)}(r)$  одержимо, підставивши в систему рівнянь (1.65) – (1.69) вирази для  $B_z(r, \vartheta, r)$  у вигляді (1.114) і виділивши в рівняннях доданки першого порядку малості за  $\varepsilon_h^{(1)}$ , які є пропорційними до  $\exp[i(k_z \mp k_s)z + i(m \pm l)\vartheta - i\omega t]$ . Тоді в області  $0 \leq r \leq r^{(\pm)}$  маємо

$$B^{(\pm)} = \psi_{\pm} \int_{r_A^{(\pm)} - x}^r \frac{\tilde{\psi}_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} - \tilde{\psi}_{\pm} \int_{r_A^{(\pm)} - x}^r \frac{\psi_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} + C_{\pm} \psi_{\pm}. \quad (1.115)$$

Тут  $\psi_{\pm} \equiv \psi(k_z \mp k_s, m \pm l, r)$  і  $\tilde{\psi}_{\pm} \equiv \tilde{\psi}(k_z \mp k_s, m \pm l, r)$  - лінійно незалежні розв'язки рівняння (1.30), що відповідають хвилі з аксіальним хвильовим числом  $k_z \mp k_s$ , азимутальним номером моди  $m \pm l$  і  $k_{\perp} = k_{\pm} = k_{\perp}(k_z \mp k_s, r)$  (одне з них,  $\psi_{\pm}$ , є обмеженим при  $r=0$ , інше,  $\tilde{\psi}_{\pm}$ , при  $r=0$  має особливість),  $C_{\pm}$  - постійні інтегрування,  $W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})$  - вронскіан функцій  $\psi_{\pm}$  і  $\tilde{\psi}_{\pm}$ ,

$$W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm}) \equiv \psi_{\pm} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\pm}}{\partial r} - \tilde{\psi}_{\pm} \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial r} = \text{const} \frac{k_{\pm}^2}{r}. \quad (1.116)$$



Оператор  $\hat{G}_{\pm}$  визначається співвідношенням

$$\hat{G}_{\pm} B^{(0)} = \frac{m \pm l}{r} k_{\pm}^2 (A_l^{(\pm)} + \mu_{\pm} A_2^{(\pm)}) - \frac{k_{\pm}^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (A_l^{(\pm)} + \mu_{\pm} A_2^{(\pm)})], \quad (1.117)$$

де  $\mu_{\pm} = \mu(k_z \mp k_s, r)$  і

$$\begin{aligned} k_{\pm}^2 A_l^{(\pm)} = & - (k_z \mp k_s) \frac{b_l I_l(k_s r)}{2B_0 \alpha r} B^{(0)} \pm \frac{b_l I_l'(k_s r)}{2B_0 \alpha r} \frac{\partial B^{(0)}}{\partial r} + \frac{ic}{\omega} (k_z \mp k_s) r E_g^{(0)} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_l I_l(k_s r)}{2B_0 \alpha r^2} \right) \\ & \mp \frac{i\omega b_l I_l(k_s r)}{2c B_0 \alpha r} E_g^{(0)} (\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2 - \frac{m}{l} N_z N_s) + \frac{i\omega \varepsilon_2^{(1)}}{2c} \pm (N_z \mp N_s) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_l I_l'(k_s r)}{2B_0} E_r^{(0)} \right) - \\ & (N_z \mp N_s) \frac{b_l I_l(k_s r)}{2B_0 \alpha r^2} E_r^{(0)} \pm \frac{b_l I_l'(k_s r)}{2B_0 \alpha r} \frac{\partial}{\partial r} (r N_z E_r^{(0)}) + \frac{\omega \varepsilon_1^{(1)}}{2c} E_r^{(0)} \mp \frac{b_l l^2 I_l'(k_s r) \varepsilon_2^{(0)}}{2B_0 N_s r} E_r^{(0)}, \quad (1.118) \\ k_{\pm}^2 A_2^{(\pm)} = & (k_s \mp k_z) \frac{b_l I_l'(k_s r)}{2B_0} B^{(0)} \pm \frac{b_l I_l'(k_s r)}{2B_0 \alpha r^2} B^{(0)} - \frac{i\omega \varepsilon_1^{(1)}}{2c} E_g^{(0)} \pm \frac{ib_l l^2 I_l'(k_s r) \varepsilon_2^{(0)}}{2B_0 N_s r} E_g^{(0)} \\ & + [(m \pm l)(N_z \mp N_s) + m N_z] \frac{ib_l I_l(k_s r)}{2B_0 \alpha r^2} E_g^{(0)} + i(N_s \mp N_z) \frac{b_l I_l'(k_s r)}{2B_0 r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r E_g^{(0)}) \pm \frac{b_l l^2 I_l'(k_s r)}{2B_0 N_s r} E_r^{(0)} \\ & \times (\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 + (N_z \mp N_s) N_s) - \frac{\omega \varepsilon_2^{(1)}}{2c} E_r^{(0)} + \frac{b_l I_l(k_s r)}{2B_0 \alpha r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r N_z E_r^{(0)}). \quad (1.119) \end{aligned}$$

Межі зміни відстані  $x$ , що входить до (1.115), точніше будуть визначені далі, при розв'язанні задачі про розподіл поля поблизу САР. На даному етапі досить, щоб було виконано умову  $r_A^{(\pm)} > x > 0$ .

Удалині від точки САР, при  $r_A^{(\pm)} < r \leq a$ , скористаємося для  $B^{(\pm)}$  виразами

$$B^{(\pm)} = \psi_{\pm} \int_{r_A^{(\pm)} + x}^r \frac{\tilde{\psi}_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} - \tilde{\psi}_{\pm} \int_{r_A^{(\pm)} + x}^r \frac{\psi_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} + S_{\pm} \psi_{\pm} + \tilde{S}_{\pm} \tilde{\psi}_{\pm}. \quad (1.120)$$

З умови рівності нулю амплітуд сателітних гармонік азимутального компонента електричного поля

$$E_g^{(\pm)} = \frac{i\omega}{c} \left( \mu_{\pm} A_1^{(\pm)} + A_2^{(\pm)} - \frac{(m \pm l) \mu_{\pm}}{k_{\pm}^2 r} B^{\pm} - \frac{1}{k_{\pm}^2} \frac{\partial B^{\pm}}{\partial r} \right), \quad (1.121)$$

на поверхні металевої камери ( $E_g^{(\pm)}(a) = 0$ ) визначаємо постійні інтегрування  $\tilde{S}_{\pm}$ :

$$\tilde{S}_{\pm} = \left[ k_{\pm}^2 A_{\pm}^2 - \psi'_{\pm} \int_{r_A^{\pm}+x}^a \frac{\tilde{\psi}_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} + \tilde{\psi}'_{\pm} \int_{r_A^{\pm}+x}^a \frac{\psi_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} - S_{\pm} \psi'_{\pm} \right] [\tilde{\psi}'_{\pm}] \Big|_{r=a}^{-1}. \quad (1.122)$$

Подібно до того, як поблизу точок основного АР (1.76) величини  $\mu(k_z, r)$  і  $k_{\perp}^2(k_z, r)$  мають особливість  $(\mu, k_{\perp}^2 \propto [\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2]^{-1})$ , і внаслідок цього амплітуда основної гармоніки АХ має логарифмічну особливість,  $B^{(0)} \propto \ln[\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2]$ , поблизу САР  $r=r_A^{(\pm)}$  відбуваються зростання амплітуд сателітних гармонік електричних і магнітних полів хвилі,  $B^{(\pm)} \propto \ln[\varepsilon_l^{(0)} - (N_z \mp N_s)^2]$ , і конверсія цих коливань у дрібно-масштабні "кінетичні" хвилі. Зазначений ефект має місце як для АХ і швидких магнітозвукових хвиль (ШМЗХ) з  $\omega < \omega_{ci}$  (якщо  $(k_z \mp k_s)^2 > \omega^2/c^2$ ), так і для ШМЗХ із  $\omega > \omega_{ci}$  (якщо  $(k_z \mp k_s)^2 < \omega^2/c^2$ ) – у розрідженій плазмі. Спільне поширення АХ (чи ШМЗХ) і дрібномасштабних хвиль поблизу точок САР  $r=r_A^{(\pm)}$  описується рівнянням

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{[\varepsilon_l^{(0)} - (N_z \pm N_s)^2]} k_{\pm}^2 \left[ \varepsilon_l^{(0)} - (N_z \pm N_s)^2 + i \varepsilon_l^{(c)} \left( \varepsilon_T + \frac{\varepsilon_l^{(0)}}{\varepsilon_3} \right) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \frac{\partial B^{(\pm)}}{\partial r} + q (k_z \pm k_s, m \pm l, r) B^{(\pm)} + k_{\pm}^{-2} \hat{G}_{\pm} B^{(0)} = 0. \quad (1.123)$$

Тут доданок  $(i \varepsilon_l^{(c)})$  враховує зіткнення частинок [184],

$$\varepsilon_l^{(c)} = \sum_{a,b} \frac{\omega_{pa}^2 v_{ab}}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \left( \frac{\omega^2 + \omega_{ca}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} - \frac{e_b m_a}{e_a m_b} \frac{\omega^2 + \omega_{ca} \omega_{cb}}{\omega^2 - \omega_{cb}^2} \right), \quad (1.124)$$

де  $e_a$  - заряд частинок сорту  $a$ ,  $v_{ab}$  - частота зіткнень частинок сорту  $a$  з частинками сорту  $b$ ,

$$v_{ab} = (4/3) \sqrt{2\pi} e_a^2 e_b^2 n_b L_C [m a^3 (1 + m_a/m_b)]^{-1/2}, \quad (1.125)$$

$L_C$  - кулонівський логарифм. Величина  $\varepsilon_T$  у (1.123) враховує скінченність ларморовського радіуса іонів [185],

$$\varepsilon_T = \sum_i 3 \omega_{pi}^2(r) \omega^2 v_{Ti}^2(r) / \left[ \left( \omega^2 - \omega_{ci}^{(0)^2} \right) \left( \omega^2 - 4 \omega_{ci}^{(0)^2} \right) c^2 \right]. \quad (1.126)$$

Інерція електронів врахована в (1.123) у компоненті тензора діелектричної проникливості  $\varepsilon_3$ . Припущення про малість струму гвинтових провідників дозволяє скористатися тут виразами для  $\varepsilon_3$ , отриманими в нульовому наближенні,

$$\varepsilon_3 = \frac{\omega_{pe}^2}{(k_z \pm k_s)^2 v_{Te}^2} [1 + i\sqrt{\pi} W(z_e)], \quad \left( z_e \equiv \frac{\omega}{\sqrt{2}|k_z \pm k_s|v_{Te}} \right). \quad (1.127)$$

Функція  $W(z_e)$  дорівнює

$$W(\xi) = \exp(-\xi^2) \left[ 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(t^2) dt \right]. \quad (1.128)$$

Якщо загасання Ландау є слабким ( $z_e \gg 1$ ), то вираз (1.127) для  $\varepsilon_3$  спрощується:

$$\varepsilon_3 = - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} (1 - 2i\sqrt{\pi} z_e^3 e^{-z_e^2}). \quad (1.129)$$

У цьому випадку необхідно врахувати зіткнення електронів з іонами,

$$\varepsilon_3 = \frac{-\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + iv_{ei})}. \quad (1.130)$$

При розв'язанні рівняння (1.123) скористаємося тією обставиною, що поблизу точок САР  $r=r_A^{(\pm)}$  амплітуда  $B^{(\pm)}$  змінюється повільніше, ніж її похідна (можна порівняти з [53, 147, 186]). Це дозволяє в результаті інтегрування за координатою  $r$  одержати з (1.123) для  $F_\pm(r) \equiv -(c/\omega) \partial B^{(\pm)} / \partial r$  неоднорідне рівняння Ейрі

$$\left[ \varepsilon_1^{(0)} - (N_z \pm N_s)^2 + i\varepsilon_1^{(c)} + \left( \varepsilon_T + \frac{\varepsilon_1^{(0)}}{\varepsilon_3} \right) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] F_\pm(r) =$$

$$[(\varepsilon_1^{(0)} - (N_z \pm N_s)^2)^2 - \varepsilon_2^{(0)^2}] \times$$

$$\left[ C_1^{(\pm)} + \int_{r_A^{(\pm)}-x}^r (q(k_z \pm k_s, m \pm l, r) B^{(\pm)} + k_\pm^{-2} \hat{G}_\pm B^{(0)}) dr \right] \frac{\omega}{cr}, \quad (1.131)$$

де  $C_1^{(\pm)}$  - постійна інтегрування. Зміну параметрів плазми поблизу точок САР вважаємо слабкою, тому при розв'язанні рівняння (1.131) скористаємося значенням його правої частини і величин  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon_3$  і  $\varepsilon_1^{(c)}$  у точці  $r=r_A^{(\pm)}$ . Вирази для амплітуд сателітних гармонік аксіального компонента магнітного поля хвилі  $B^{(\pm)}$ , які асимптотично зшиваються з (1.115) і є справедливими поблизу  $r=r_A^{(\pm)}$ , одержимо з (1.131) у вигляді

$$B^{(\pm)} = C_\pm \psi_\pm(r^{(\pm)}-x) - \tilde{\psi}_\pm \int_0^{r_A^{(\pm)}-x} \frac{\psi_\pm \hat{G}_\pm B^{(0)}}{W(\psi_\pm, \tilde{\psi}_\pm)} dr - \frac{\omega}{c} \int_{r_A^{(\pm)}-x}^r F_\pm(r) dr, \quad (1.132)$$

де

$$F_{\pm}(r)=iF_1^{(\pm)} \varepsilon_2^{(0)2} k_l \left( \frac{\partial \varepsilon_1^{(0)}}{\partial r} \right)^{-1} \Big|_{r=r_A^{(\pm)}} u_0(\xi), \quad (1.133)$$

$$u_0(\xi)=s \int_0^{\infty} \exp \left[ i s (t \xi + t^3) / 3 \right], \quad (1.134)$$

$$F_l^{(\pm)} = \left[ C_1^{(\pm)} + \int_{r_A^{(\pm)}-x}^{r_A^{(\pm)}} \left( q(k_z \pm k_s, m \mp l, r) B^{(\pm)} + k_{\pm}^{-2} \hat{G}_{\pm} B^{(0)} \right) dr \right] \frac{\omega}{c r_A^{(\pm)}} =$$

$$\left\{ \frac{c k_{\pm}^2}{\omega \varepsilon_2^{(0)}} A_1^{(\pm)} - i E_g^{(\pm)} - \frac{c(m \mp l)}{\omega r \varepsilon_2^{(0)}} B^{(\pm)} \right\}_{r_A^{(\pm)}}, \quad (1.135)$$

$$\xi = k_l(r - r_A^{(\pm)}) - i\eta, \quad k_l = \left( -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_1^{(0)}}{\partial r} \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_T \varepsilon_3 + \varepsilon_1^{(0)}} \right)_{r_A^{(\pm)}}^{1/3} = |k_l| e^{i\psi}, \quad (1.136)$$

$$s = sgn \left[ \frac{\partial \varepsilon_1^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r_A^{(\pm)}} \operatorname{Re}(k_l) \right], \quad \eta = -k_l \varepsilon_l^{(c)} \left( \frac{\partial \varepsilon_1^{(0)}}{\partial r} \right)_{r_A^{(\pm)}}^{-1}. \quad (1.137)$$

Відзначимо, що, хоча залежність  $B^{(\pm)}(r)$  у вигляді (1.115), (1.120) і має особливість у точці  $r=r_A^{(\pm)}$ , комбінація  $\left[ iE_g^{(\pm)} + \frac{c(m \pm l)}{\omega r \varepsilon_2^{(0)}} B^{(\pm)} \right]$ , що входить до (1.135), повільно міняється поблизу  $r=r_A^{(\pm)}$ . Подібна методика використовувалась в [53, 147, 186]. Співвідношення (1.135) не тільки вводить позначення  $F_1^{(\pm)}$ , але і зв'язує константи інтегрування  $C_1^{(\pm)}$  з (1.131) з константами  $C_{\pm}$  з (1.115).

З огляду на асимптотику розв'язка рівняння (1.131) при  $Re(\xi) \rightarrow -\infty$

$$u_0(\xi) \approx \frac{i}{\xi} + \left( \frac{\pi^2}{-\xi} \right)^{1/4} \exp \left[ -is \left( \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (1.138)$$

будемо вважати, що при віддаленні від точки САР дрібномасштабна кінетична хвиля (другий доданок у (1.138)) сильно загасає в малій околиці точки резонансу за рахунок зіткнень або за рахунок механізму Ландау. Дрібномасштабність кінетичної хвилі ( $k_l \gg (k_z \pm k_s)$ ,  $|m \mp l|/r^{(\pm)}$ ) дозволяє так вибрати відстань  $x$ , що входить у

визначення (1.115), (1.120) і (1.132), щоб вона була малою в порівнянні з  $r_A^{(\pm)}$  і характерної для  $B^{(\pm)}$  (1.115) довжини хвилі і разом з тим досить великою, щоб на відстані  $x$  від точки САР дрібномасштабною кінетичною хвилею вже можна було знехтувати і скористатися для визначення значення амплітуди сателітної гармоніки  $B^{(\pm)}(r^{(\pm)} - x)$  виразом (1.115). Якщо ж загасання дрібномасштабної хвилі слабе, то асимптотику (1.138) варто зшити з розв'язком рівняння (1.123), який одержують методом ВКБ і який відповідає хвилям, що несуть енергію від точки конверсії в глиб плазми чи до її периферії. Ми припускаємо в такому випадку, що ці дрібномасштабні хвилі цілком поглинаються на одному проході. Тим самим ми не досліджуємо різні ефекти, що можуть з'явитися при дуже слабкому загасанні, зокрема, виникнення в цьому випадку глобальних резонансів з високим значенням радіального номера.

Умова сильного загасання дрібномасштабної кінетичної хвилі дозволяє провести асимптотичну зшивку виразів (1.115), (1.120) і (1.132) для  $B^{(\pm)}$ . Визначені в результаті цього постійні інтегрування  $C^{(\pm)}$  і  $S^{(\pm)}$  дорівнюють

$$C^{(\pm)} = \left\{ \tilde{\psi}'_{\pm}(a) \tilde{\psi}_{\pm}(r_A^{(\pm)} - x) \int_0^{r_A^{(\pm)}} \frac{\psi_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)}}{W_{\pm}} dr + S^{(\pm)} (\tilde{\psi}'_{\pm}(a) \psi_{\pm}(r_A^{(\pm)} + x) - \tilde{\psi}'_{\pm}(r_A^{(\pm)} + x) \psi'_{\pm}(a)) \right. \\ \left. + i \tilde{\psi}'_{\pm}(a) \pi \frac{\omega}{c} \varepsilon_2^{(0)2} (r_A^{(\pm)}) F_l^{(\pm)} \left( \frac{\partial \varepsilon_1^{(0)}}{\partial r} \right)^{-1}_{r_A^{(\pm)}} + \tilde{\psi}_{\pm}(r_A^{(\pm)} + x) \right. \\ \left. \times \left[ k_{\pm}^2(a) A_2^{(\pm)} - \psi'_{\pm}(a) \int_{r_A^{(\pm)} + x}^a \frac{\tilde{\psi}_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)}}{W_{\pm}} dr + \tilde{\psi}'_{\pm}(a) \int_{r_A^{(\pm)} + x}^a \frac{\tilde{\psi}_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)}}{W_{\pm}} dr \right] \right\} \\ \times [\psi_{\pm}(r_A^{(\pm)} + x) \tilde{\psi}'_{\pm}(a)]^{-1}, \quad (1.139)$$

$$S^{(\pm)} = -i \frac{\omega \psi'_{\pm}(r_A^{(\pm)} - x) \tilde{\psi}'_{\pm}(a)}{c \psi'_{\pm}(a) W_{\pm}(r_A^{(\pm)} - x)} \pi \varepsilon_2^{(0)2} (r_A^{(\pm)}) F_l^{(\pm)} \left( \frac{\partial \varepsilon_1^{(0)}}{\partial r} \right)^{-1}_{r_A^{(\pm)}} \\ + \left[ k_{\pm}^2(a) A_2^{(\pm)} + \tilde{\psi}'_{\pm}(a) \int_0^a \frac{\psi_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)}}{W_{\pm}} dr - \psi'_{\pm}(a) \int_{r_A^{(\pm)} + x}^a \frac{\tilde{\psi}_{\pm} \hat{G}_{\pm} B^{(0)}}{W_{\pm}} dr \right] [\psi'_{\pm}(a)]^{-1}, \quad (1.140)$$

тут  $W_{\pm} = W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})$ .

Обчислимо величину потужності, що поглинається поблизу точки САР на одиниці довжини плазмового шнура,

$$P^{(\pm)} = \pi r^{(\pm)} \left( \int (j_r^* E_r^{(\pm)} + j_z^* E_z^{(\pm)}) dr \right). \quad (1.141)$$

Вона складається з роботи поля над радіальними ВЧ струмами  $j_r \propto \exp \{ i[(k_z \pm k_s)z + (m \pm l)\vartheta - \omega t] \}$

$$P_r^{(\pm)} = \frac{\pi \omega}{4} \left[ r \left( \partial \varepsilon_l^{(0)} / \partial r \right)^{-1} \varepsilon_2^{(0)^2} \right]_{r=r_A^{(\pm)}} |F_l^{(\pm)}|^2, \quad (1.142)$$

і роботи над аксіальними ВЧ струмами

$$P_z^{(\pm)} = \left( \left| \frac{d\varepsilon_l^{(0)}}{dr} \right|^{-1} \frac{r \varepsilon_2^{(0)^2} \varepsilon_l^{(0)} \operatorname{Im}(\varepsilon_3^*)}{|\varepsilon_T \varepsilon_3^2 + \varepsilon_l^{(0)} \varepsilon_3|} \right)_{r=r_A^{(\pm)}} \frac{\omega}{4} |k_l| |F_1^{(\pm)}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right|^2 dr. \quad (1.143)$$

Відомі вирази [147, 186] для потужності  $P^{(0)}$ , що поглинається в основному АР (1.76), виходять з (1.142) і (1.143), якщо в них замінити  $r_A^{(\pm)} \rightarrow r_A^{(0)}$ ,  $(N_z \pm N_s) \rightarrow N_z$ ,  $E_g^{(\pm)} \rightarrow E_g^{(0)}$ ,  $B^{(\pm)} \rightarrow B^{(0)}$ ,  $(m \mp l) \rightarrow m$  і у виразі (1.135) для  $F_1^{(\pm)}$  покласти величину  $A_1^{(\pm)}$  рівною нулеві.

Відзначимо, що внесок  $P_z^{(\pm)}$  у нагрівання на сателітній гармоніці не є малим у порівнянні з  $P_r^{(\pm)}$ , якщо  $\operatorname{Im}(\varepsilon_3) \geq \operatorname{Re}(\varepsilon_3)$ :

$$\frac{P_z^{(\pm)}}{P_r^{(\pm)}} \sim \left| \frac{\varepsilon_1^{(0)}}{\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_T \varepsilon_3} \right| \frac{\operatorname{Im}(\varepsilon_3)}{|\varepsilon_3|}. \quad (1.144)$$

Визначимо тепер умови, за яких можна знехтувати впливом тривимірної неоднорідності магнітного поля і густини в стеллараторі на розподіл електромагнітного поля в області конверсії в САР  $r \approx r_A^{(\pm)}$ . У цій області

$$\varepsilon_l(r, \vartheta, z) = (N_z \pm N_s)^2 + \frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \bigg|_{r_A^{(\pm)}} (r - r^{(\pm)}) + \varepsilon_l^{(1)} \cos(l\theta). \quad (1.145)$$

Конверсія хвиль відбувається в області шириною  $\Delta r$ , де

$$\Delta r = |r - r^{(\pm)}| \sim l/|k_l| \sim (\rho_{Li}^2 a^*)^{1/3}, \quad a^* = \left[ \frac{1}{(N_z \pm N_s)^2} \frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \bigg|_{r_A^{(\pm)}} \right]^{-1} \sim a. \quad (1.146)$$

Останній доданок у (1.145), що залежить від координати  $\theta = \vartheta - \alpha z$ , виявляється

несуттєвим у цій області, якщо  $\Delta r \gg \left| \varepsilon_1^{(1)} \left( \partial \varepsilon_1^{(0)} / \partial r \right)^{-1} \right| \Big|_{r_A^{(\pm)}}$ , тобто

$$\frac{\Delta r}{r_A^{(\pm)}} \sim \left( \frac{\rho_{Li}}{a^*} \right)^{2/3} \gg \varepsilon_h^{(1)} \frac{I_l'(k_s r_A^{(\pm)})}{k_s r_A^{(\pm)} I_l(k_s r_A^{(\pm)})}. \quad (1.147)$$

Умова резонансу за наявності компонентів  $B_{0r}$  і  $B_{0\theta}$  стеллараторного поля у наближенні ВКБ має вигляд

$$\varepsilon_l(r, \vartheta, z) \approx \frac{c^2}{\omega^2} k_{\parallel}^2 = \frac{c^2}{\omega^2 B_0^2} \left[ (k_z \pm k_s) B_{0z} + k_r B_{0r} + \frac{m \mp l}{r} B_{0\theta} \right]^2. \quad (1.148)$$

Найбільший доданок у правій частині цієї умови, що залежить від  $\theta$  і є пропорційним до добутку  $k_r B_{0r}$ , виявляється малим у порівнянні з  $(\partial \varepsilon_l^{(0)} / \partial r) \Delta r$ , якщо

$$\left( \frac{\Delta r}{r_A^{(\pm)}} \right)^2 \sim \left( \frac{\rho_{Li}}{a^*} \right)^{4/3} \gg \frac{2 B_{0r} a^*}{B_0 (k_z \pm k_s) r_A^{(\pm)2}} \sim \frac{\varepsilon_h^{(1)} I_l'(k_s r_A^{(\pm)})}{I_l(k_s r_A^{(\pm)}) (k_z \pm k_s) r_A^{(\pm)}}. \quad (1.149)$$

Інші доданки в правій частині (1.148), що залежать від  $\theta$ , виявляються несуттєвими при виконанні менш жорстких умов,

$$\frac{\Delta r}{r_A^{(\pm)}} \sim \left( \frac{\rho_{Li}}{a^*} \right)^{2/3} \gg 2 \varepsilon_h^{(1)} \left( 1 + \frac{1}{\alpha r_A^{(\pm)}} \left| \frac{m \mp l}{(k_z \pm k_s) r_A^{(\pm)}} \right| \right). \quad (1.150)$$

Умови (1.149) і (1.150) можуть виконуватися в стеллараторах, якщо область САР розташована в глибині плазми, де  $\varepsilon_h^{(1)}$  малий, а температура плазми велика.

У загальному випадку гвинтове магнітне поле стелларатора може бути представлене у вигляді (1.111) ряду Фур'є за кутом  $\theta$  [169]. Виділення однієї гармоніки в (1.111) з  $j=0$  (див. (1.3)) є справедливим або тільки в навколоосевій області, або в усьому об'ємі плазми,

появи при розв'язанні рівнянь  $\exp\{i[(k_z \pm n\alpha)z + (m \mp (2j+1)l)\vartheta - \alpha]$  де

$\varepsilon_l(r,$

Отримані вище вирази для ампл (1.132) - (1.137) і потужності, що

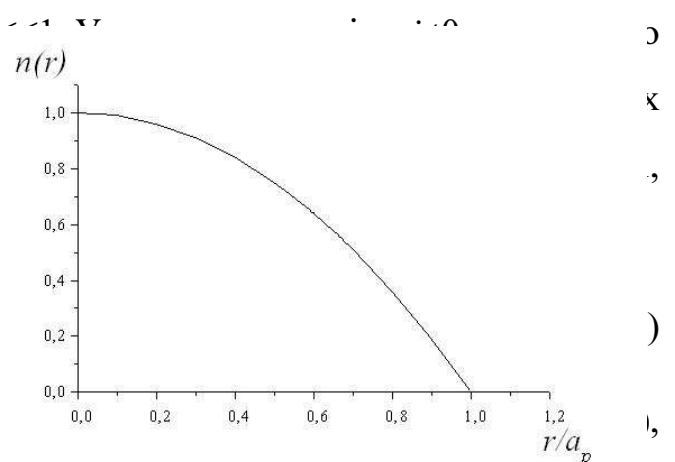


Рис.1.5 Модельний квадратичний радіальний профіль густини плазми.

ведливими в цьому випадку при заміні  $l \rightarrow l(2j+1)$ . Однак амплітуди гармонік утримуючого поля з  $j \neq 0$  швидко зменшуються при зростанні номера  $j$ , при цьому умови нехтування неодновимірними ефектами в резонансній області (1.151), де відбувається конверсія хвиль, є аналогічними до (1.147), (1.149) і (1.150), а їх виконання полегшується.

Обговоримо здобуті в цьому підрозділі результати. Показано, що в плазмі стеллараторів може відбуватися додаткове (у порівнянні з основним АР (1.76)) поглинання енергії хвилі накачування в областях САР (1.112). Величина потужності, що поглинається в області додаткових резонансів, визначається виразами (1.142) і (1.143) і є пропорційною до квадрата малого параметра (1.113), який характеризує відмінність форми магнітних поверхонь від круглого циліндра, тобто зазвичай є малою в порівнянні з потужністю, що поглинається в основному АР. Однак, у деяких розглянутих випадках поглинання в області САР може виявитися більш істотним, ніж при основному АР. До таких випадків належать наступні.

Перший випадок. Якщо величина  $k_z$  досить мала, а густина плазми - велика, то основний резонанс  $r=r_A^{(0)}$  знаходиться на периферії плазми. При переміщенні

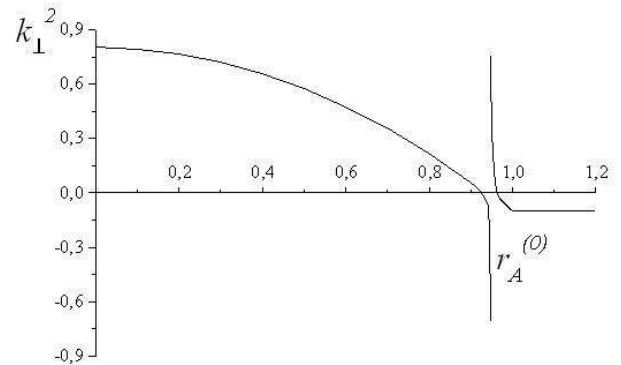


Рис.1.6 Радіальна залежність квадрата перпендикулярного хвильового числа (1.29) основної гармоніки.

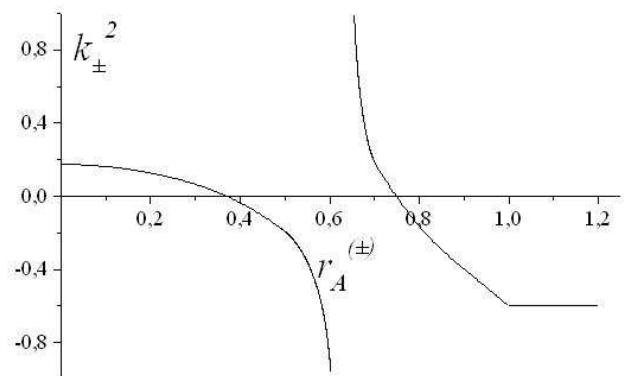


Рис.1.7 Радіальна залежність квадрата перпендикулярного хвильового числа сателітної гармоніки.



точки резонансу  $r=r_A^{(0)}$  на периферію плазми градієнт густини збільшується, а потужність, що поглинається в області резонансу, зменшується,  $P(0) \propto (\varepsilon_2^{(0)})^2 (\partial \varepsilon_1^{(0)} / \partial r)^{-1}$ . При досить великих  $k_s$  САР  $r=r_A^{(\pm)}$  можуть знаходитися в глибині плазми (див. Рис.1.5 - 1.7). Частка  $P_r^{(\pm)}$  до  $P_r^{(0)}$ , згідно (1.142), дорівнює за порядком величини

$$P_r^{(\pm)} / P_r^{(0)} \sim [n(r^{(\pm)}) / n(r^{(0)})] \times [(k_z \pm k_s) / k_z]^2 |F_l^{(\pm)} / F_l^{(0)}|^2. \quad (1.152)$$

Звідси видно, що  $P_r^{(\pm)}$  може бути більше, ніж  $P_r^{(0)}$ , якщо  $k_s$  досить велике в порівнянні з  $k_z$ , а густина  $n(r^{(0)})$  мала в порівнянні з  $n(r^{(\pm)})$ . При цьому варто врахувати, що через малість  $k_z$  поле  $B^{(0)}$  може мати вузький бар'єр непрозорості на периферії плазми [13] і тому добре проникати в глибину плазми, де в області досить великих густин  $(\omega_{pi}^2 / [\omega_{ci}(\omega + \omega_{ci})] > N_z^2)$  поле  $B^{(0)}$  являє собою ШМЗ хвилю і його сателіти  $B^{(\pm)}$  відчують резонансне поглинання в точках САР.

Хвиля  $B^{(0)}$  може бути власною зі слабким загасанням для розглянутого плазмового хвильоводу (плазмового резонатора, у випадку плазмового тора - плазмового циліндра з ототожненими кінцями). У цьому випадку резонансно підростуть і сателітні гармоніки  $B^{(\pm)}$ , і відповідно збільшиться потужність, що поглинається як у точці  $r=r_A^{(0)}$ , так і в точках  $r=r_A^{(\pm)}$ .

Поглинання на сателітних гармоніках у точці  $r=r_A^{(\pm)}$  також може бути посилене в тому випадку, коли хвиля з подовжнім хвильовим числом  $(k_z \pm k_s)$  і азимутальним номером  $(m \mp l)$  є власною для хвильоводу. У цьому випадку резонансно підростають два останні доданки в круглих дужках в (1.135)

$$\left( iE_g^{(\pm)} + \frac{c(m \mp l)}{\omega r \varepsilon_2^{(0)}} B^{(\pm)} \right) \Big|_{r=r_A^{(\pm)}}.$$

Другий випадок. У плазмі малої густини усюди  $N_z^2 > \varepsilon_l^{(0)}$ , і основний резонанс відсутній. Однак у цьому випадку можлива наявність резонансу  $r=r_A^{(-)}$ , що забезпечить поглинання хвилі накачування. У цьому резонансі поглинання також може бути посилене за рахунок того, що сателітна хвиля  $B^{(-)}$  буде власною модою хвильоводу.

Третій випадок. Швидкі магнітозвукові хвилі з аксіальним хвильовим числом  $|k_z| > \omega/c$  і частотою  $\omega > \omega_{ci}$  на відміну від АХ узагалі не відчують основного резонансу (1.76). (Конверсія і резонансне поглинання ШМЗХ із  $|k_z| > \omega/c$  і частотою  $\omega > \omega_{ci}$  у периферійній плазмі досліджені в [187].) Якщо ж при цьому  $|k_z + k_s| < \omega/c$ , то для таких ШМЗХ у плазмі стелларатора утвориться САР (1.112). Оскільки в глибині термоядерної плазми  $\omega_{pi}^2 > \omega_{ci}^2$ , точка  $r = r_A^{(+)}$  цього САР розташована на периферії плазмового шнура. Хоча, з одного боку, густина  $n(r_A^{(+)})$  і квадрат аксіального хвильового числа гармоніки  $(k_z + k_s)^2$ , що входять співмножниками до виразів (1.142) і (1.143) для ВЧ потужності, яка поглинається, у цьому випадку є невеликими, з іншого боку, відмінність форми магнітних поверхонь від прямого циліндра найбільше помітна саме на периферії плазми (параметр  $\varepsilon_h^{(l)}$  зростає при збільшенні радіуса), до того ж амплітуда поля накачування також зазвичай максимальна саме поблизу поверхні плазми. Тому відзначений тут САР може зробити помітний внесок до небажаного нагрівання периферії плазми стелларатора.

#### 1.4. Тонка структура основного альфвенівського резонансу в плазмовому шнурі, що міститься в сильному аксіальному магнітному полі і помірному полі з гвинтовою симетрією

У цьому підрозділі розподіл полів електромагнітної хвилі в області локального альфвенівського резонансу вивчено за умов, коли він визначається саме гвинтовою неоднорідністю утримуючого магнітного поля, а не інерцією елек-

тронів чи ефектом скінченного ларморовського радіуса іонів [188]. Показано, що врахування саме гвинтової неоднорідності постійного магнітного поля (замість інших слабких ефектів) може усувати нескінченний розрив полів хвилі, що має місце в прямому магнітному полі. Поглинання ВЧ потужності в області локального АР обчислено і порівняно з випадком, коли структура АР визначається іншими слабкими ефектами.

Здобудемо систему рівнянь, що визначає поведінку амплітуд основної й сателітних гармонік в області локального АР. Виходячи із симетрії задачі, зокрема, із вигляду виразів (1.7), слід шукати розв'язок рівнянь Максвелла в наступному вигляді,

$$E_r = \left[ E_r^{(0)}(r) + E_r^{(+1)}(r) e^{il\theta} + E_r^{(-1)}(r) e^{-il\theta} \right] \exp i(k_z z + m\vartheta - \omega t). \quad (1.153)$$

Представлення (1.153) відповідає пакету, що містить основну гармоніку і дві найближчі сателітні гармоніки. Представлення у формі ряду Фур'є для інших компонентів магнітних і електричних полів хвилі подібні до (1.153).

Наслідуючи методику роботи [53] і інших авторів, ми використовуємо метод «вузького шару». Він означає повільну зміну густини плазми і постійного магнітного поля в області АР. Припускається також повільна зміна полів у всіх напрямках, крім радіального,

$$|\partial E_r / \partial r| \gg k_{max} |E_r|, \quad k_{max} = \max(m/r_A, k_z, \omega/c). \quad (1.154)$$

Підставимо вирази (1.153) для полів хвилі і (1.7) для компонентів тензора діелектричної проникливості до системи рівнянь (1.65) – (1.69) і виділимо доданки, що є пропорційними до  $\propto \exp\{i[k_z z + m\theta - \omega t]\}$  і  $\propto \exp\{i[(k_z \mp k_s)z + (m \pm l)\theta - \omega t]\}$ . Підкреслимо, що при цьому не слід звертати уваги на порядок величини цих доданків відносно малого параметра, який характеризує відмінність форми магнітних поверхонь від кола. Оскільки рівняння для радіального компонента електричного поля є найбільш зручним для вивчення структури АР, то наводимо тут тільки наступну замкнену систему трьох рівнянь для амплітуд основної й сателітних гармонік радіального електричного поля, що виведена з рівнянь Максвелла,

$$\left[ (\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_{gt} r / R) E_r^{(0)} - A \right] + \frac{c^2 \delta^2}{2\omega^2} \frac{d^2 E_r^{(0)}}{dr^2} + 0.5 \varepsilon_1^{(1)} E_r^{(+1)}$$

$$-\frac{c^2 k_s \delta}{2\omega^2} \frac{dE_r^{(+1)}}{dr} + \frac{c^2}{\omega^2} \delta(k_z + k_s) \frac{dE_r^{(+1)}}{dr} \quad (1.155)$$

$$-\frac{c^2 k_s \delta}{2\omega^2} \frac{dE_r^{(-1)}}{dr} + 0.5 \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(-1)} - \frac{c^2}{\omega^2} \delta(k_z - k_s) \frac{dE_r^{(-1)}}{dr} = 0,$$

$$-\frac{c^2}{2\omega^2} \delta(\pm 2k_z - k_s) \frac{dE_r^{(0)}}{dr} + (N_z \mp N_s)^2 E_r^{(\pm 1)} - \frac{c^2 \delta^2}{2\omega^2} \frac{d^2 E_r^{(\pm 1)}}{dr^2} - N_z^2 E_r^{(\pm 1)} + \frac{c^2 \delta^2}{4\omega^2} \frac{dE_r^{(\mp 1)}}{dr} = 0. \quad (1.156)$$

Тут  $\delta = nb_n I'_n(k_s r)/B_0$  - це малий параметр, що характеризує слабку модуляцію радіального компонента утримуючого магнітного поля. Комбінація  $i\varepsilon_2^{(0)} E_g^{(0)} + (cm/(\omega r)) B_z^{(0)} \equiv A$  у лівій частині (1.155) виявляється такою, що повільно змінюється поблизу АР, хоча обидва поля  $E_g^{(\pm 1)}$  і  $B_z^{(\pm 1)}$  мають особливість (1.2) в області АР у холодному наближенні. (Повільна зміна подібної комбінації в аксіальному магнітному полі добре відома – див., наприклад, роботу [53] і [155].) Саме тому природно розглядати цю комбінацію як константу, що фактично зв'язана з хвилею накачування, яка збуджується антеною.

Нагадаємо про те, який вплив чинять обертальне перетворення і гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля поза областю АР. Розподіл поля електромагнітної хвилі поза АР, у якому з урахуванням обертального перетворення має місце наступне рівняння,

$$\varepsilon_l^{(0)} = N_z^2 + 2N_z N_g \iota r/R, \quad (1.157)$$

може бути ефективно визначено в рамках теорії збурень. Тут  $\iota$  - обертальне перетворення,  $R$  - великий радіус тора,  $N_g = cm/\omega r$  - пологісний показник заломлення. Оскільки в прямому магнітному полі ( $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ) окремі просторові гармоніки електромагнітної хвилі з різними аксіальними хвильовими векторами і пологісними номерами мод поширюються незалежно, то можна припустити, що амплітуда основної гармоніки  $\propto \exp\{i[k_z z + m\theta - \omega t]\}$  є єдиною, що відрізняється від нуля в нульовому наближенні. Розподіл полів хвилі поза межами АР в аксіальному магнітному полі докладно вивчено (див., наприклад, [13, 175]), тому поводження полів

хвилі поза областю АР вважаємо тут відомим. Наявність обертального перетворення змінює амплітуду основної гармоніки на малу величину першого порядку за параметром  $(l r/R)$  (див., наприклад, [189]). Вплив гвинтової неоднорідності утримуючого магнітного поля на амплітуду основної гармоніки позначається тільки в другому наближенні за малим параметром (див., наприклад, підрозділ 1.1). Амплітуди сателітних гармонік є меншими за порядком величини, ніж амплітуда основної гармоніки,

$$|E_r^{(\pm l)}| \sim \delta |E_r^{(0)}|, \quad (1.158)$$

усюди в плазмовому шнурі, крім області АР. Відзначимо, що при цьому не припускається заздалегідь, що амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік є такими малими в області АР, тобто не припускається заздалегідь, що співвідношення (1.158) є істинними в області АР. Більше того, отримані в цьому підрозділі результати підтверджують, що співвідношення (1.158) не є застосовним там.

Здобудемо і розв'яжемо спрощене основне рівняння для амплітуди основної гармоніки радіального електричного поля. Система рівнянь (1.155), (1.156) складається з трьох диференціальних рівнянь другого порядку. Вона може бути записана як наступне рівняння шостого порядку для амплітуди  $E_r^{(0)}$  основної гармоніки:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{16} \frac{c^4}{\omega^4} \delta^4 \frac{d^4}{dr^4} \left[ (\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_{gl} r/R) E_r^{(0)} + A \right] \\ & - \frac{c^2}{\omega^2} \delta^2 N_s^2 \frac{d^2}{dr^2} \left[ (\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_{gl} r/R) E_r^{(0)} + A \right] \\ & + N_s^2 (N_s^2 - 4N_z^2) \left[ (\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_{gl} r/R) E_r^{(0)} + A \right] + \frac{3}{32} \frac{c^6}{\omega^6} \delta^6 \frac{d^6}{dr^6} E_r^{(0)} \Big|_{(6,6)} \\ & - \frac{1}{8} \frac{c^4}{\omega^4} \delta^4 (N_s^2 + 4N_z^2) \frac{d^4}{dr^4} E_r^{(0)} \Big|_{(4,4)} + \frac{3}{8} \frac{c^3}{\omega^3} \delta^3 N_s \varepsilon_l^{(1)} \frac{d^3}{dr^3} E_r^{(0)} \Big|_{(4,3)} \\ & - \frac{1}{2} \frac{c}{\omega} \delta N_s \varepsilon_l^{(1)} (N_s^2 - 4N_z^2) \frac{d}{dr} E_r^{(0)} \Big|_{(2,1)} = 0. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Ми приписали два нижніх індекси кожному з останніх чотирьох доданків у рівнянні (1.159). Пояснимо їхній зміст, взявши за приклад останній доданок. Індекси

(2,1) показують, що похідна **першого** порядку помножена в цьому доданку на малий коефіцієнт **другого** порядку за  $\delta$ . Аналіз співвідношення між порядком малості й порядком відповідної похідної дозволяє спростити рівняння (1.159) у такий спосіб:

$$-\frac{1}{8} \frac{c^4}{\omega^4} \delta^4 (N_s^2 - 4N_z^2) \frac{d^4}{dr^4} E_r^{(0)} + N_s^2 (N_s^2 - 4N_z^2) \left[ (\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_{gt} r / R) E_r^{(0)} + A \right] = 0. \quad (1.160)$$

Пізніше ми визначимо точність перетворення рівняння (1.159) до вигляду (1.160).

Якщо радіальний профіль густини плазми є лінійним в області АР, так, що

$$(\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_{gt} r / R) = \partial \varepsilon_l^{(0)} / \partial r \big|_{r_A} (r - r_A), \quad (1.161)$$

тоді аналітичний розв'язок (1.160) може бути отриманий методом Лапласа в наступному вигляді:

$$E_r^{(0)} = (a^* k_l / N_s^2) A u_0 [k_l (r - r_A)], \quad u_0(\xi) = \int_0^\infty \exp[i(t\xi + t^5 / 5)] dt, \quad (1.162)$$

$$k_l = \left( \frac{c^4 \delta^4 a^*}{8\omega^4 N_s^2 N_z^2} \frac{N_s^2 + 4N_z^2}{N_s^2 - 4N_z^2} \right)^{-1/5} \sim [k_z^2 k_s^2 / (\delta^4 a^*)]^{1/5} \propto \delta^{-4/5},$$

тут  $a^* = \left| d \ln \varepsilon_l^{(0)} / dr \right|_{r_A}^{-1}$  - характерний радіальний масштаб, на якому змінюється

густина плазми в області АР. Цей розв'язок задовольняє наступним крайовим умовам: він є обмеженим; він описує конверсію електромагнітної хвилі в дрібно-масштабну хвилю, що несе енергію геть від області АР; він загасає при врахуванні слабкої дисипації у  $\varepsilon_l^{(0)}$ . Поведінка функції  $u_0(\xi)$  (яка описує амплітуду основної гармоніки радіального електричного ВЧ поля) показана на Рис. 1.8. Зазначимо, що абсолютне значення цієї функції досягає максимуму ( $\max\{|u_0(\xi)|\} = 1.459$ ) не при  $\xi=0$ , а при  $\xi = -1.325$ . Таке радіальне положення максимуму є аналогічним випадку, коли розподіл полів в АР визначається скінченням іонним ларморовським радіусом або інерцією електронів [46].

Асимптотичний вираз для розв'язка  $u_0$  (див. (1.162)) при  $Re(\xi) \rightarrow -\infty$  може бути записаний в наступному вигляді:

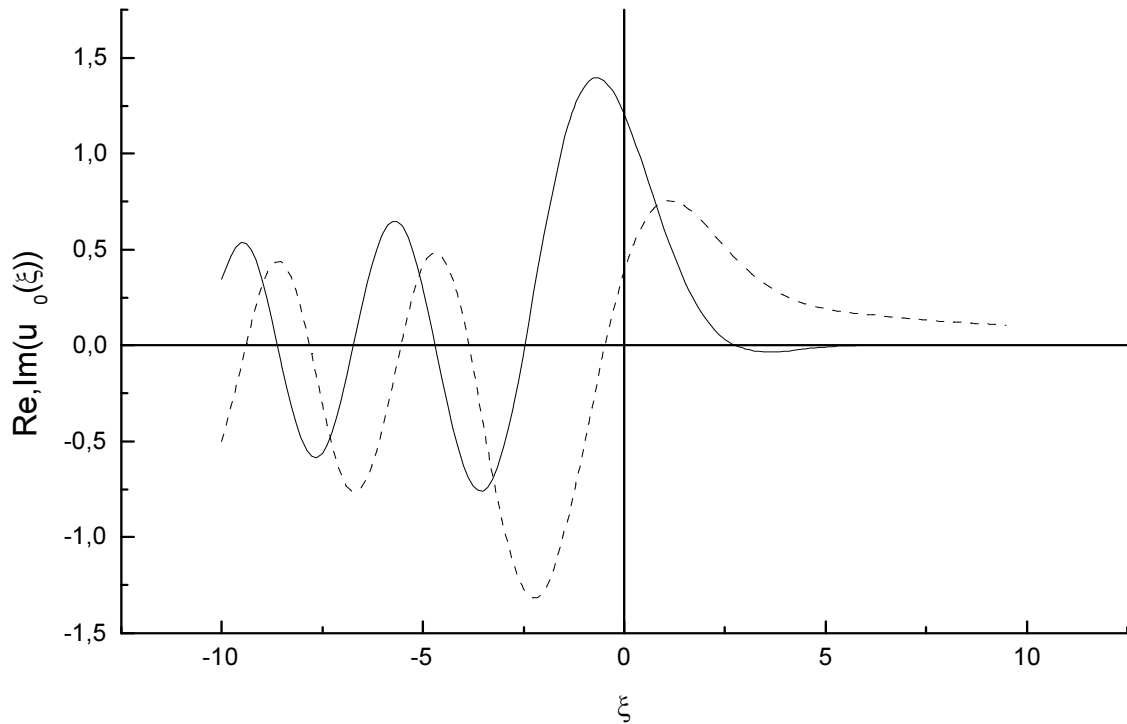


Рис. 1.8 Поводження реальної (суцільна лінія) і уявної (штрихова лінія) частин функції  $u_0(\xi)$ .

$$u_0(\xi) \approx \frac{i}{\xi} + \left( \frac{\pi^2}{-\xi} \right)^{\frac{1}{8}} \exp \left[ -i \left( \frac{4}{5} (-\xi)^{\frac{4}{5}} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (1.163)$$

Він дозволяє припустити, що при віддаленні від АР,  $r=r_A$ , амплітуда дрібномасштабної хвилі, що описується другим доданком у правій частині (1.163), швидко зменшується поблизу резонансної точки внаслідок загасання Ландау чи зіткнень між частинками плазми.

Ширина  $\Delta r = k_l^{-1}$  АР є меншою в  $\delta^{-2/15}$  разів за ширину сателітного АР, вивченого в підрозділі 1.6. Відповідно, характерне значення амплітуди  $E_r^{(0)}$  основної гармоніки радіального компонента електричного поля хвилі в області АР може бути оцінене з (1.162) за порядком величини в такий спосіб,

$$E_r^{(0)} \sim a k_l A / N_z^2 \sim \left( \frac{\omega^4 a^4 N_s^2}{\delta^4 N_z^8 c^4} \right)^{\frac{1}{5}} A. \quad (1.164)$$

Радіальне електричне ВЧ поле може сприяти дифузії частинок плазми, якщо воно порівнянне з амбіполярним електричним полем  $\sim T/(ea)$ . У цьому випадку амплітуда хвилі накачування мала б наступний порядок величини:

$$E_g \sim \frac{m_i \rho_{Li}^2 \omega_{ci}^3}{e \omega a} \bar{\Delta}_l^{0.8}, \quad (1.165)$$

за цих умов стрикційна нелінійність залишається слабкою в області АР.

Нагадаємо, що при розв'язанні цієї задачі не використовувалося припущення про те, що амплітуди  $E_r^{(\pm 1)}$  сателітних гармонік є малими в порівнянні з  $E_r^{(0)}$ . Тепер можна і слід оцінити характерне значення  $E_r^{(\pm 1)}$ ,  $E_r^{(\pm 2)}$  ... в області АР. Використовуючи рівняння (1.156), знаходимо,

$$E_r^{(\pm 1)} = -(\delta/2k_s) dE_r^{(0)}/dr \sim (k_l \delta/k_s) E_r^{(0)},$$

$$E_r^{(\pm 2)} = -(\delta/4k_s) dE_r^{(\pm 1)}/dr \sim (k_l \delta/k_s)^2 E_r^{(0)} \dots \quad (1.166)$$

Аналіз (1.166) показує, що, хоча амплітуди  $E_r^{(\pm 1)}$  сателітних гармонік і зростають в області АР навіть швидше, ніж амплітуда  $E_r^{(0)}$  основної гармоніки, проте вони залишаються меншими, ніж  $E_r^{(0)}$ , в області АР. Порівняння значень (1.158) і (1.166) показує, що розходження в порядку величини між  $E_r^{(0)}$  і  $E_r^{(\pm 1)}$  не так виявляється в області АР, як поза ним.

Тепер можна оцінити точність перетворення рівняння (1.159) до спрощеного вигляду (1.160). Найбільший з відкинутих доданків,

$$-\frac{c^2}{\omega^2} \delta^2 N_b^2 \frac{d^2}{dr^2} \left[ (\epsilon_l^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_{gt} r/R) E_r^{(0)} + A \right], \quad (1.167)$$

є малою величиною порядку  $\sim \delta^{2/5}$  у порівнянні з третім доданком у (1.159), що ми залишили. Перший доданок у (1.159) є малою величиною порядку  $\delta^{4/5}$ . Доданки, яким приписано індекси  $(i, j)$ , можуть бути оцінені в порівнянні із залишеним доданком з індексами (4,4) як малі величини порядку  $\delta^{(i-4-0.8(j-4))}$ .

Саме аксіальне електричне ВЧ поле зростає найбільш різко в області АР,

$$E_z^{(0)} \approx \frac{ic}{\omega \epsilon_3} N_z \frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial r} \sim \frac{\alpha a^*}{N_z^2} \frac{\rho_{Li}^2}{a^{*2}} \frac{A}{\bar{\Delta}_l^{1.6}}. \quad (1.168)$$



Цей компонент електричного поля залишається набагато меншим, ніж радіальний компонент  $E_r^{(0)}$ . Вплив  $E_z^{(0)}$  на перехід частинок плазми із замкнених у пролітні є незначним в лінійному наближенні за амплітудою ВЧ поля.

Виведемо умови, за яких структура локального АР визначається слабкою гвинтовою неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , а не інерцією електронів, іонним ларморівським радіусом або зіткненнями. Урахування цих слабких ефектів у (1.160) може бути легко виконано шляхом наступної заміни:

$$\varepsilon_l^{(0)} - N_s^2 - 2N_s N_g t r / R \rightarrow \varepsilon_l^{(0)} - N_s^2 - 2N_s N_g t r / R + i\varepsilon_l^{(c)} + (\varepsilon_T + N_s^2 / \varepsilon_3) c^2 / \omega^2 \partial^2 / \partial r^2. \quad (1.169)$$

Тут доданок  $i\varepsilon_l^{(c)}$  визначений формулою (1.124), він враховує зіткнення між частинками плазми [184]. Структуру АР при врахуванні самих тільки зіткнень між частинками плазми показано суцільною лінією на Рис. 1.9. Вплив зіткнень на структуру АР у термоядерних уловлювачах є зазвичай слабкішим за вплив скінченного ларморівського радіуса іонів. Саме тому амплітуда основної гармоніки електричного поля хвилі ( $E_r^{(0)} \sim A\omega / (N_z^2 v_{ab})$ ) виявляється найбільшою, та ширина АР ( $\Delta r_{coll} \sim a^* v_{ab} / \omega$ ) - найвужчою в порівнянні з Рис. 1.10 та Рис. 1.11.

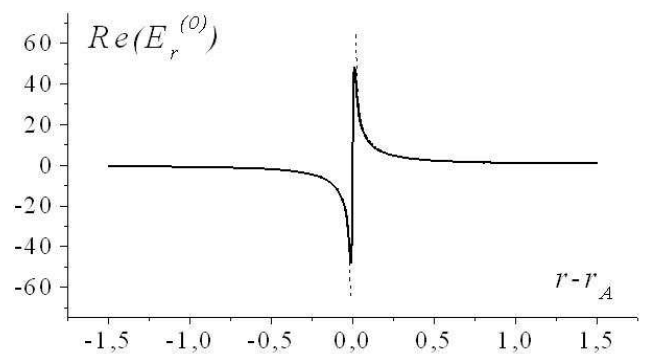


Рис. 1.9 Структура альфвенівського резонансу з урахуванням зіткнень між частинками плазми (суцільна лінія) і за нехтування всіма дисипативними ефектами (штрихова лінія).

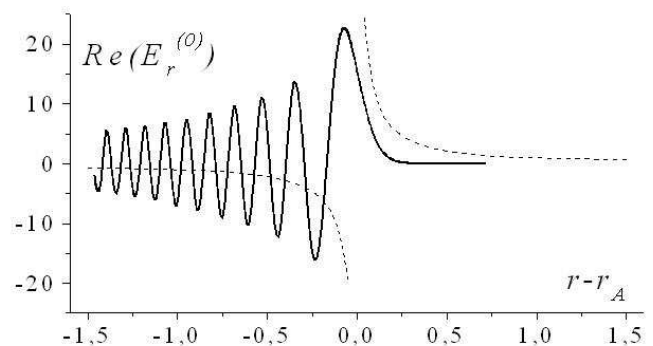


Рис. 1.10 Структура альфвенівського резонансу з урахуванням теплового руху іонів (суцільна лінія) і за нехтування всіма дисипативними ефектами (штрихова лінія).

Множник  $\varepsilon_T$  (1.126) у заміні (1.169) враховує скінченний іонний ларморівський радіус [185]. Скінченну інерцію електронів також взято до уваги в (1.169) через компонент  $\varepsilon_3$  (1.127) – (1.130) тензора діелектричної проникливості. Типову структуру АР, обумовлену впливом теплового руху іонів і скінченною інерцією електронів, показано суцільною лінією на Рис. 1.10. Вплив цих двох факторів на структуру АР зазвичай є в термоядерних уловлювачах (і вважається тут) більшим, ніж вплив зіткнень. Тому в порівнянні з Рис. 1.9 амплітуда основної гармоніки електричного поля хвилі ( $E_r^{(0)} \sim (A/N_z^2)(a^*/\rho_{Li})^{2/3}$ ) показана меншою, а ширина АР ( $\Delta r_T \sim a^*(\rho_{Li}/a^*)^{2/3}$ ) - більшою.

Аналіз основного рівняння (1.160) з урахуванням заміни (1.169) показує, зокрема, що вплив слабкої гвинтової неоднорідності  $\vec{B}_0$  на структуру АР більш істотний, ніж вплив скінченного іонного ларморівського радіуса  $\rho_{Li}$  і інерції електронів, якщо справедлива наступна нерівність,

$$\delta^{12/5} \gg (\rho_{Li}/a)^2 (k_z k_s a^*)^{6/5}. \quad (1.170)$$

Отримана умова може бути виконана в периферійній плазмі, де гвинтова неоднорідність  $\vec{B}_0$  найбільш істотна, і плазма холодніша, ніж у глибині плазмового шнура. Нерівність (1.170) може мати місце для більш низької іонної температури, ніж подібна умова у випадку сателітного АР, вивченого в підрозділі 1.6. Умова (1.170) може бути інтерпретована в наступний спосіб. Радіальне відхилення  $r-r_A$  магнітної поверхні (1.4) від циліндра із середнім радіусом є більшим, ніж характерна ширина  $(\rho_{Li}^2 a)^{1/3}$  області АР, що є відомою величиною для випадку прямого магнітного поля.

Демонстрацію перетворення структури АР по мірі

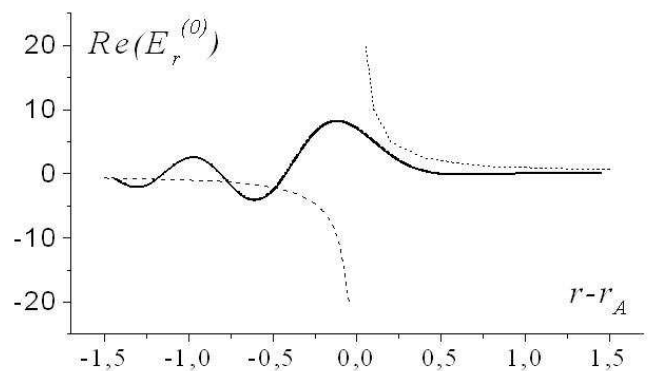


Рис. 1.11 Структура альфвенівського резонансу з урахуванням гвинтової неоднорідності плазми (суцільна лінія) і за нехтування всіма дисипативними ефектами (штрихова лінія).

послідовного включення в розгляд слабких явищ закінчено на Рис. 1.11. Поводження амплітуди основної гармоніки радіального електричного поля хвилі показано там суцільною лінією при виконанні умови (1.170), яка означає, що вплив періодичної гвинтової неоднорідності плазми на структуру АР є найсильнішим у порівнянні з впливом зіткнень, теплового руху іонів і скінченної інерції електронів. Саме тому амплітуда основної гармоніки електричного поля хвилі показана такою, що має найменшу величину, а ширина АР – найбільшу величину в порівнянні з Рис. 1.9 та Рис. 1.10. Пунктирні лінії на Рис. 1.9 – 1.11 відповідають випадку нехтування всіма зазначеними слабкими ефектами.

Обчислимо потужність, що поглинається в одиниці довжини плазмового тора поблизу області АР. Вона складається з роботи, що виконується полем основної гармоніки над радіальними ВЧ струмами,  $P_r = 0.5 \operatorname{Re} \{ \int j_r^* E_r 2\pi r dr \}$ , і роботи, яка виконується над аксіальними ВЧ струмами,  $P_z = 0.5 \operatorname{Re} \{ \int j_z^* E_z 2\pi r dr \}$ , де

$$P_r = \frac{r\omega}{4} \left| \frac{d\varepsilon_l}{dr} \right|^{-1} |A|^2 \Big|_{r=r_A} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_0(x)) dx, \quad (1.171)$$

$$P_z = \frac{r\omega k_l^3 a^2}{4|\varepsilon_3|^2 \alpha^2} \operatorname{Im}(\varepsilon_3) \Big|_{r=r_A} |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |u'_0(x)|^2 dx. \quad (1.172)$$

Якщо замінити функцію  $u_0$  у виразі (1.171) функцією Ейрі, тоді цей вираз збігається з тим, що здобутий у випадку, коли структура АР визначається скінченним іонним ларморівським радіусом або скінченною інерцією електронів (див., наприклад, [53] чи [149]). Числові розрахунки підтвердили, що інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_0(x)) dx = \pi$$

так само, як і у випадку інтегрування функції Ейрі.

Як було відзначено в [147], внесок від потужності  $P_z$  не є малим у порівнянні з внеском від  $P_r$ , якщо  $\operatorname{Im}(\varepsilon_3) \geq \operatorname{Re}(\varepsilon_3)$ . Вираз (1.172) збігається з подібним, отриманим у випадку, коли структура АР визначається скінченням іонним ларморівським радіусом або скінченною інерцією електронів (див., наприклад, [147] чи [149]), якщо замінити  $u_0$  функцією Ейрі від аргументу  $[k_T(r-r_A)]$  і видалити малий

множник  $(k_l/k_T)^3$ . Тут

$$k^3_T = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial r} \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_T \varepsilon_3 + N_s^2}. \quad (1.173)$$

Судячи з асимптотичного виразу (1.163),  $|u'_0(\xi)|^2 \propto (-\xi)^{1/4}$  при  $Re(\xi) \rightarrow \infty$ , і інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u'_0(x)|^2 dx$  у виразі (1.172) розходиться. Щоб перебороти цю проблему, можна взяти до уваги дисипативні явища (тобто врахувати в компоненті тензора діелектричної проникливості  $Im(\varepsilon_3)$ ). Якщо  $Im(\varepsilon_3) \sim Re(\varepsilon_3)$ , то відповідний інтеграл від квадрата похідної функції Ейрі можна оцінити за порядком величини як одиницю. Тоді можна обчислити коефіцієнт загасання  $Im(k_l)$  із рівняння (1.160) з урахуванням заміни (1.169):

$$Im(k_l) \sim k_l^4 / (2k^3). \quad (1.174)$$

За цих умов підінтегральний вираз у правій частині (1.172) зменшується на коефіцієнт  $\exp[2 Im(k_l)(r-r_A)]$  для від'ємної півосі, і величину інтеграла можна оцінити як  $k_T^3/k_l^3$ . Внаслідок цього, поглинання ВЧ потужності, що обумовлене роботою над аксіальними ВЧ струмами поблизу АР, у розглянутому випадку збігається з тим, що має місце, коли структура АР визначається скінченним іонним ларморівським радіусом або скінченною інерцією електронів, принаймні, за порядком величини.

На закінчення підіб'ємо основні підсумки підрозділу. У ньому представлено результати теоретичного дослідження структури АР у циліндричній плазмі, яку поміщено у гвинтове магнітне поле. Розподіл електромагнітних полів в області АР визначений і проаналізований з урахуванням гвинтової неоднорідності утримуючого магнітного поля, інерції електронів, іонного ларморівського радіуса й зіткнень. Ширина АР і характерні значення амплітуд основної гармоніки (1.164) і сателітних (1.166) гармонік оцінені за порядком величини. Наступні висновки можуть бути зроблені за результатами дослідження.

Гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля викликає зв'язок просторових гармонік електромагнітних хвиль із різними значеннями аксіальних хвильових чисел і полоїдних номерів мод.

У цьому підрозділі отримано умову (1.170), при виконанні якої просторовий розподіл електромагнітних хвиль в області локального АР визначається саме гвинтовою неоднорідністю утримуючого магнітного поля, а не інерцією електронів або скінченням іонним ларморівським радіусом. Нерівність (1.170) може бути виконана в холодній периферійній плазмі, де ріпли утримуючого магнітного поля є найбільш істотними. Як відомо, область локального АР пересувається саме до межі плазми в результаті зростання густини плазми, що відбувається при одержанні плазми в термоядерних уловлювачах. Характерна ширина області АР є більшою в цьому випадку, ніж у прямому магнітному полі за інших рівних умов.

Амплітуди сателітних гармонік зростають при наближенні до області АР швидше, ніж амплітуда основної гармоніки. Це призводить до усунення у гвинтовому магнітному полі торсатрона розриву полів електромагнітних хвиль, що має місце в холодному наближенні в прямому магнітному полі. Характерне значення (1.164) радіального електричного поля хвилі у гвинтовому магнітному полі є меншим, ніж у випадку прямого магнітного поля за інших рівних умов. Виявляється, що ВЧ потужність (1.170) і (1.171), що поглинається в області АР, у дослідженому тут випадку збігається зі значенням, відомим для випадку, коли структура АР визначається скінченням іонним ларморівським радіусом або скінченною інерцією електронів. Величина цієї потужності є такою самою в наступних трьох випадках: у першому випадку поглинання викликане конверсією електромагнітної хвилі в області АР у дрібномасштабну хвилю, яка обумовлена помірною гвинтовою неоднорідністю плазми і яка потім поглинається за рахунок зіткнень або механізму Ландау; у другому випадку поглинання обумовлене зіткненнями; у третьому випадку поглинання викликане конверсією електромагнітної хвилі в області АР у дрібномасштабну кінетичну альфвенівську хвилю, що потім поглинається за рахунок зіткнень або механізму Ландау.

### 1.5. Резонансний вплив гвинтової неоднорідності утримуючого магнітного поля торсаторона на структуру основного альфвенівського резонансу

Цей підрозділ присвячений дослідженню особливостей структури локального альфвенівського резонансу для електромагнітних хвиль з резонансними значеннями аксіального хвильового вектора  $k_z$  і полоїдного номера  $m$  основної гармоніки (див. (1.64)), для яких аксіальний період основної гармоніки вдвічі перевищує крок  $L$  гвинтового провідника і полоїдний номер  $m$  вдвічі менший за мультиполярність  $l$  гвинтових котушок [165, 167, 190, 191]. Ця резонансна умова вказує на слабкий зв'язок гармонік, які характеризуються протилежними знаками аксіального хвильового числа і полоїдного номера моди у випадку, коли цей зв'язок обумовлений гвинтовою неоднорідністю сталого магнітного поля (1.3).

Умова (1.64) може спостерігатись лише в стеллараторах з парною мультиполярністю гвинтових котушок. Оскільки стелларатори з мультиполярністю  $l=4$  чи  $l=6$  ані будуються, ані плануються будувати де б то не було, подальший розгляд виконано саме для випадку  $l=2$ , який часто реалізується в сучасних стеллараторах (див. Табл.1.1). В цьому випадку поперечний переріз плазми має форму еліпса, який обертається, якщо рухатись в тороїдному напрямку.

Оскільки тут не розглядаються хвилі з аксіальними хвильовими векторами, які б відрізнялись від тих, що задовольняють резонансній умові (1.64) (це було предметом дослідження в підрозділі 1.4), тому важливість цієї розвідки для високочастотного нагрівання плазми, де, як правило, присутній широкий спектр аксіальних хвильових векторів, може здаватись на перший погляд спірною. Але ВЧ потужність, що її випромінює антена, зазвичай вкладається саме в хвилі з аксіальними хвильовими числами, які за порядком величини дорівнюють  $2\pi/L_z$ . Аксіальний розмір  $L_z$  антени зазвичай обмежений відстанню між сусідніми портами, яка приблизно дорівнює кроку гвинтового провідника  $L$ . Тому ВЧ потужність, що поглинається плазмою і відповідає електромагнітним хвилям з резонансними значеннями (1.64) аксіального хвильового числа основної гармоніки, може бути істотною.

В цьому підрозділі також здобуто умови, за яких структура АР визначається саме слабкою гвинтовою неоднорідністю плазми, а не іншими слабкими ефектами. Пояснено можливість виникнення щілини в альфвенівському континуумі. Основна фізична риса, якою цей матеріал відрізняється від матеріалу, що викладено в попередніх роботах інших авторів (напр., [23], де взято до уваги тороїдну неоднорідність утримуючого магнітного поля, або [18], де враховано еліптичність пологіх перерізів магнітних поверхонь) полягає в тому, що тут враховано модуляцію радіальної компоненти утримуючого магнітного поля, тобто  $B_{0r} \neq 0$ .

Виведемо основне рівняння, яке визначає тонку структуру АР у цьому резонансному випадку. Для двозахідного торсатрона з урахуванням малих доданків тільки першого порядку за малим параметром задачі система рівнянь (1.15) – (1.17) набуває вигляду (1.65) – (1.69) у циліндричних координатах.

Виходячи із симетрії задачі, особливо, з вигляду виразів (1.7) для компонентів тензора діелектричної проникливості, і враховуючи резонансну умову (1.64), ми шукаємо розв'язок системи рівнянь Максвелла (1.65) – (1.69) у наступному вигляді,

$$E_r = \{E_r^{(+1)}(r)e^{i\theta} + E_r^{(-1)}(r)e^{-i\theta} + E_r^{(+3)}(r)e^{i3\theta} + E_r^{(-3)}(r)e^{-i3\theta}\} \exp(-i\omega t). \quad (1.175)$$

Представлення (1.175) відповідає випадку хвильового пакету, що містить дві основні гармоніки з резонансними значеннями  $k_z = \pm \alpha$  аксіального хвильового числа і  $m = \mp 1$  пологідного номера моди і дві найближчі сателітні гармоніки з аксіальними хвильовими числами  $k_z = \pm 3\alpha$  і пологідними номерами  $m = \mp 3$ . Представлення у вигляді ряду Фур'є для інших компонентів магнітних і електричних полів хвилі є аналогічними (1.175). Амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік, як відомо, є малими (див., наприклад, [151]),

$$E_r^{(\pm 3)} \sim |\Delta_2 E_r^{(\pm 1)}|, \quad (1.176)$$

усюди в плазмовому шнурі, крім області АР. Підкреслимо, що при розв'язанні задачі не припускається заздалегідь, що амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік є малими в області АР, тобто не вважається заздалегідь, що співвідношення (1.176) виконано в області АР, і результати виконаного дослідження підтверджують, що

умова (1.176) дійсно не виконується там.

Наслідуючи методику роботи [53], ми використовуємо тут метод «вузького шару». Він передбачає повільну зміну густини плазми і постійного магнітного поля в радіальному напрямку в області АР. Також передбачається повільна зміна полів у всіх напрямках, крім радіального.

Підставляємо вирази (1.175) для полів МГД хвилі і (1.7) для компонентів тензора діелектричної проникливості до системи рівнянь Максвелла (1.65) – (1.69) і виділяємо доданки, що є пропорційними  $\exp(\pm i\theta)$  і  $\exp(\pm 3i\theta)$ . Підкреслимо ще раз, що не слід звертати при цьому уваги на порядок малості доданків відносно  $\Delta_2$ . Оскільки рівняння для радіального компонента електричного поля є найбільш зручним для вивчення структури АР, тому запишемо тут тільки наступну замкнену систему чотирьох рівнянь, що отримана з (1.65) – (1.69),

$$B_g^{(\pm 1)} = \pm N_s E_r^{(\pm 1)} \mp \frac{N_s r \bar{\Delta}_2}{2} \frac{\partial}{\partial r} (E_r^{(\mp 1)} - E_r^{(\pm 3)}), \quad N_s = c\alpha/\omega, \quad (1.177)$$

$$B_g^{(\pm 3)} = \pm 3 N_s E_r^{(\pm 3)} \mp \frac{N_s r \bar{\Delta}_2}{2} \frac{\partial}{\partial r} E_r^{(\pm 1)}, \quad (1.178)$$

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon_1^{(0)} - N_s^2 \right) E_r^{(\pm 1)} + \frac{\varepsilon_l^{(1)}}{2} (E_r^{(\mp 1)} + E_r^{(\pm 3)}) + \left( i\varepsilon_2^{(0)} E_g^{(\pm 1)} \pm \frac{c}{\omega r} B_z^{(\pm 1)} \right) = \\ & = \mp N_s (B_g^{(\pm 1)} \pm N_s E_r^{(\pm 1)}) \mp \frac{N_s r \bar{\Delta}_2}{2} \frac{\partial}{\partial r} (B_g^{(\mp 1)} - B_g^{(\pm 3)}), \end{aligned} \quad (1.179)$$

$$\left[ -8N_s^2 + \left( \frac{N_s r \bar{\Delta}_l}{2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] E_r^{(\pm 3)} = 2N_s^2 r \bar{\Delta}_l \frac{\partial}{\partial r} E_r^{(\pm 1)} + \left( \frac{N_s r \bar{\Delta}_l}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 E_r^{(\mp 1)}}{\partial r^2}. \quad (1.180)$$

Тут малі параметри  $\Delta_2$  і  $\bar{\Delta}_2$  визначені формулами (1.70).

Виявляється, що комбінація  $i\varepsilon_2^{(0)} E_g^{(\pm 1)} + (cm/(\omega r)) B_z^{(\pm 1)} \equiv A^{(\pm)}$  в лівій частині рівняння (1.179) змінюється повільно поблизу АР у випадку лінійного профілю густини, хоча обидва поля  $E_g^{(\pm 1)}$  і  $B_z^{(\pm 1)}$  мають особливість (1.2) в області АР у холодному наближенні. (Повільна зміна аналогічної комбінації в аксіальному магнітному полі добре відома, див., наприклад, [53] чи [149].) Щоб переконатися в цьому, можна розглянути рівняння (1.66) і (1.69). Після підстановки виразів (1.175)



для полів хвилі і (1.7) для компонентів тензора діелектричної проникливості в ці рівняння, ми залишаємо доданки, що зростають найбільш різко при наближенні до АР (а саме,  $\propto(\varepsilon_l^{(0)}-N_s^2)^{-1}$ ), і менш сингулярні доданки, що є пропорційними  $\ln|\varepsilon_l^{(0)}-N_s^2|$ , (ці останні доданки показано нижче в квадратних дужках):

$$i \frac{\partial}{\partial r} (r E_g^{(\pm 1)}) = \mp E_r^{(\pm 1)} - \left[ \frac{\omega r}{c} B_z^{(\pm 1)} \right], \quad (1.181)$$

$$\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} B_z^{(\pm 1)} = \varepsilon_2^{(0)} E_r^{(\pm 1)} - \left[ i N_s B_r^{(\pm 1)} - i \varepsilon_1^{(0)} E_g^{(\pm 1)} \right]. \quad (1.182)$$

Після інтегрування цих рівнянь за радіальною координатою слід помножити рівняння (1.181) на  $\varepsilon_2^{(0)} / r$  і рівняння (1.182) - на  $\pm 1 / r$ . Потім складаємо їх і одержуємо комбінацію  $A^{(\pm)}$  у лівій частині. Найбільш сингулярні доданки в правій частині, що є пропорційними  $E_r^{(\pm 1)}$ , скорочуються. Менш сингулярні доданки в правій частині не викликають швидкої зміни  $A^{(\pm)}$ . Саме тому природно розглядати цю комбінацію як константу, що фактично зв'язана з хвилею накачування, яка збуджується антеною. Саме величина  $A^{(\pm)}$  представляє вплив крайових умов на межі плазма - вакуум, на антені і на металевій поверхні камери.

В (1.179) жирним шрифтом позначено ті доданки, що відрізняють це рівняння від рівняння у випадку прямого постійного магнітного поля. Тільки ці доданки визначають особливості структури АР. Важливо підкреслити, що права частина (1.179) не містить у точності жодного доданку першого, другого і третього порядку малості за  $\Delta_2$ . Щоб одержати потрібне рівняння для  $E_r^{(\pm 1)}$ , підставимо рівняння (1.177), (1.178) і (1.180) до рівняння (1.179).

Щоб спростити подальший розгляд, припускаємо другий доданок  $\propto \partial^2 / \partial r^2$  у квадратних дужках у лівій частині (1.180) малим у порівнянні з  $N_s^2$ . У результаті одержуємо наступне рівняння для амплітуд  $E_r^{(\pm 1)}$  основних гармонік МГД хвилі,

$$\left( \varepsilon_l^{(0)} - N_s^2 - \frac{\varepsilon_l^{(1)} r \bar{\Delta}_l}{8} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{N_s^2 r^4 \bar{\Delta}_l^4}{128} \frac{\partial^4}{\partial r^4} \right) E_r^{(\pm 1)}$$

$$+ \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{2} \left[ E_r^{(\mp 1)} - \frac{r^2 \bar{\Delta}_l^2}{32} \frac{\partial^2 E_r^{(\mp 1)}}{\partial r^2} \right] = -A^{(\pm)}. \quad (1.183)$$

Подальший аналіз (1.183) показує, що можна знехтувати доданком, що містить першу похідну, у порівнянні з доданком, пропорційним четвертій похідній. З тією же самою точністю можна знехтувати другим доданком у квадратних дужках у (1.183). Тоді одержуємо остаточний вигляд основного рівняння, що підлягає вивченню,

$$\left( \varepsilon_1^{(0)} - N_s^2 - \frac{N_s^2 r^4 \bar{\Delta}_l^4}{128} \frac{\partial^4}{\partial r^4} \right) E_r^{(\pm 1)} + \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{2} E_r^{(\mp 1)} = -A^{(\pm)}. \quad (1.184)$$

Врахування гвинтової неоднорідності постійного магнітного поля призводить до виникнення двох нових доданків в основному рівнянні (1.184) у порівнянні з випадком прямого магнітного поля. Перший доданок містить амплітуду іншої основної гармоніки, що характеризується протилежним значенням аксіального хвильового числа і поперічного номера моди. Цей доданок походить від слабкої гвинтової неоднорідності аксіальної складової  $B_{0z}$  утримуючого магнітного поля (1.3).

Щоб проаналізувати вплив цього доданка на властивості МГД хвиль, зручно переписати систему рівнянь (1.184) у наступному вигляді:

$$\hat{Q} E_r^{(+1)} = -0,5 \varepsilon_1^{(1)} E_r^{(-1)}, \quad \hat{Q} E_r^{(-1)} = -0,5 \varepsilon_1^{(1)} E_r^{(+1)}, \quad (1.185)$$

тут диференціальний оператор четвертого порядку  $\hat{Q}$  визначений у такий спосіб,

$$\hat{Q} E_r^{(\pm 1)} \equiv \left( \varepsilon_1^{(0)} - N_s^2 - \frac{N_s^2 r^4 \bar{\Delta}_l^4}{128} \frac{\partial^4}{\partial r^4} \right) E_r^{(\pm 1)} - A^{(\pm)}. \quad (1.186)$$

Власні значення  $\hat{Q}$  можуть бути отримані з (1.185),

$$Q^2 = (0,5 \varepsilon_1^{(1)})^2 > 0. \quad (1.187)$$

Слід підкреслити позитивність знака  $Q^2$ , бо ця обставина має особливе значення. Цей факт інтерпретується в такий спосіб. Розглянемо пряму на фазовій площині  $(k_z, m/r)$ , що перетинає наступні дві точки:  $(0,0)$  і  $(0,5k_s, -0,5l/r)$ . Іншими словами, це - лінія хвильових векторів, що є паралельними до незбуреного зовнішнього магнітного поля  $(0, r_0/R, B_0)$ . Ця пряма відіграє роль осі абсцис на Рис. 1.12. Тепер

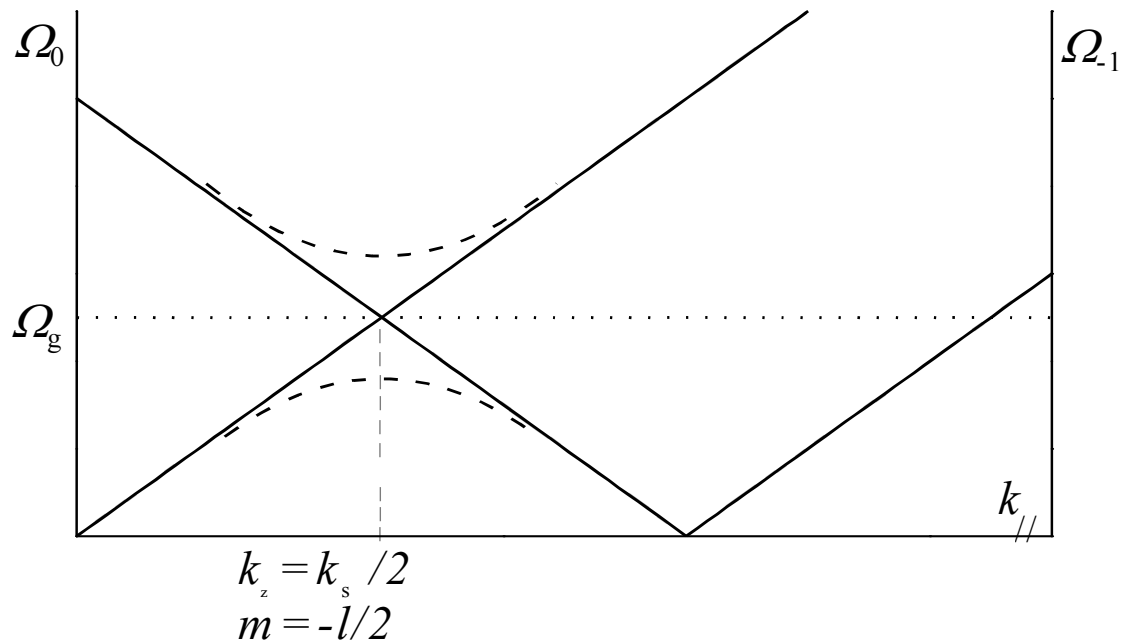


Рис. 1.12 Схематичний опис залежності локальної альфвенівської резонансної частоти від паралельного хвильового вектора. Суцільні лінії відповідають випадку незбуреного магнітного поля. Пунктирні лінії демонструють щілину в континуумі, обумовлену періодичною неоднорідністю утримуючого магнітного поля. Точкова лінія відповідає частоті генератора.

введемо альфвенівський континуум  $\Omega_0(k_z, m) = |k_z + m l r/R| v_A$ , тут величина альфвенівської швидкості  $v_A = c \omega_{ci} / \omega_{pi}(r)$  є фіксованою, і  $\Omega_0$  - частота локального резонансу. У технічних термінах це означає, що, якщо антена збуджує електромагнітні хвилі з частотою  $\Omega_0$ , то АР відбувається в точці  $r=r_A$  для гармоніки з аксіальним хвильовим вектором  $k_z$  і похідним хвильовим числом  $m$  у постійному магнітному полі без гвинтової модуляції. Розглянемо також функцію  $\Omega_{-l}(k_z, m) = |(k_z - k_s) + (m+l) l r/R| v_A$ , що описує альфвенівський континуум для гармоніки, що зачеплюється в гвинтовому магнітному полі зі згаданою вище гармонікою і яку записано для тієї ж самої фіксованої величини альфвенівської швидкості. Якщо антена генерує ВЧ потужність з частотою  $\Omega_{-l}$ , то АР відбувається в точці  $r=r_A$  для гармоніки з аксіальним хвильовим вектором  $k_z - k_s$  і похідним хвильовим числом  $m+l$  у незбуреному магнітному полі. Ці дві прямі перетинаються для резонансних

значень (1.64) аксіального хвильового числа і полоїдного номера моди. Тобто якщо електромагнітна потужність генерується з частотою  $\Omega_g = \Omega_0(k_s/2, -l/2) = \Omega_l(k_s/2, -l/2)$ , що відповідає перетинанню цих залежностей, тоді обидві гармоніки мають їхній локальний АР саме в точці  $r=r_A$ . У гвинтовому магнітному полі в альфвенівському континуумі виникає щілина (див. Рис. 1.12),  $\Omega^2 = \Omega_0^2(0.5 k_s, -0.5l) (1 + \Delta_s)$ , де

$$\Delta_s = \pm \left[ \frac{\partial(\varepsilon_l^{(0)} - N_s^2)}{\partial(\omega^2)} \right]^{-1} \frac{\varepsilon_l^{(1)}}{2\Omega_0^2} \approx \pm \left( 2\epsilon_h - \frac{l}{2a^* k_s^2} \frac{d\epsilon_h}{dr} \right), \quad (1.188)$$

тут поправка першого порядку малості  $\varepsilon_l^{(1)}$  визначена формулою (1.9). Тому ані гармоніка з аксіальним хвильовим вектором  $k_z$  і полоїдним номером моди  $m$ , ані гармоніка з  $(k_z - k_s)$  і  $m+l$  не мають їхнього локального АР у точці  $r=r_A$ , якщо антена працює з частотою  $\Omega_g$  у гвинтовому магнітному полі.

Розміри цієї щілини (1.188) слушно порівняти з результатом роботи [123], в якій ширина  $\Delta_{s|classic}$  щілини в континуумі визначено так:

$$\Delta_{s|classic} = \pm 2 \left( \epsilon_h - \frac{l}{k_s^2} \frac{d^2 \epsilon_h}{dr^2} \right). \quad (1.189)$$

Вирази (1.188) і (1.189) є рівними за порядком величини. Їхні перші доданки збігаються. Другий доданок  $r\Delta/2a^*$  у виразі (1.188) зв'язаний з градієнтом густини плазми, а вираз (1.189) не містить жодної вказівки на вплив радіального профілю густини плазми на ширину щілини. Другий доданок у виразі (1.189) дорівнює за порядком величини першому доданку, або більший за нього.

Цю щілину (1.188) можна порівняти також із щілиною  $\Delta_{el}$  в альфвенівському континуумі, яка обумовлена еліптичністю (див. [19]),

$\Omega^2 = \Omega_0^2 (1 + \Delta_{el})$ , тут

$$\Delta_{el} = \pm 2 \lambda', \quad (1.190)$$

параметр  $\lambda$  описує еліптичність поперечних перерізів магнітних поверхонь,

$$r_0 = r - \lambda(r) \cos 2\vartheta. \quad (1.191)$$

Розбіжність між величинами (1.188) і (1.190) щілин у континуумі полягає в тому, що вираз (1.188) містить доданок  $r\bar{\Delta}/2a$ , пропорційний до градієнта густини пла-

зми, а вираз (1.190) - ні. Ця розбіжність інтерпретується в такий спосіб. Наше дослідження вивчає АР, що має місце в плазмі з неоднорідним профілем густини, тоді як у роботі [19] розглянуто випадок однорідного профілю густини. Для порівняння щілин (1.188) і (1.190) можна також зауважити, що величина  $\lambda$  у рівнянні (1.191) магнітної поверхні з еліптичним перерізом подібна  $r\bar{\Delta}/2$  в рівнянні (1.4) магнітної поверхні в гвинтовому магнітному полі. Тому порівняння величин щілин зводиться до порівняння між  $d0,5r\bar{\Delta}/dr$  і  $\alpha r\bar{\Delta}$ . Ці величини рівні за порядком величини, тобто має місце якісна згода між двома підходами. Однак, ці дві щілини є різними в принципі через наступну причину. Магнітні поверхні (1.4) в гвинтовому магнітному полі не переходять в еліптичні магнітні поверхні (1.191) ні на якій границі, зокрема, в граничному переході  $\alpha \rightarrow 0$ .

Другий доданок в основному рівнянні (1.184), що відрізняє його від випадку прямого магнітного поля, є пропорційним до четвертої похідної. Він зв'язаний з модуляцією радіального компонента  $B_{0r}$  утримуючого магнітного поля (1.3). Цей доданок більший за перший, що його обговорено вище, за порядком величини в  $\bar{\Delta}_2^{-0,2}$  разів. Саме тому нижче ми нехтуємо доданком  $0.5\varepsilon_1^{(1)}E_r^{(\mp 1)}$  при розв'язанні рівняння (1.184).

Якщо радіальний профіль густини плазми є лінійним поблизу АР,

$$(\varepsilon_1^{(0)} - N_s^2) = \partial \varepsilon_1^{(0)} / \partial r \big|_{r_A} (r - r_A), \quad (1.192)$$

то аналітичний розв'язок рівняння (1.184) може бути отримано методом Лапласа в наступному вигляді:

$$E_r^{(\pm 1)} = (ak_1 / N_s^2) A^{(\pm)} u_0 [k_1 (r - r_A)], \quad (1.193)$$

$$u_0(\xi) = \int_0^\infty \exp[i(t\xi + t^5/5)] dt, \quad k_1 = (r_A^4 \bar{\Delta}_l^4 a / 128)^{-1/5}. \quad (1.194)$$

Залежність реальної і уявної частин функції  $u_0(\xi)$  наведено на Рис. 1.8 і проаналізовано в попередньому підрозділі 1.4.

Характерне значення амплітуди  $E_r^{(\pm 1)}$  основної гармоніки радіального компонента електричного поля МГД хвилі в області АР може бути оцінене з (1.193) і

(1.194) за порядком величини в такий спосіб,

$$E_r^{(\pm 1)} \sim k_1 a A^{(\pm)} / N_s^2. \quad (1.195)$$

У виконаному дослідженні не використовувалося припущення про те, що амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік є малими в порівнянні з  $E_r^{(\pm 1)}$ . Тепер можна оцінити характерне значення  $E_r^{(\pm 3)}$  в області АР за порядком величини, використовуючи рівняння (1.180), у такий спосіб,

$$E_r^{(\pm 3)} \sim \bar{\Delta}_l^{1/5} E_r^{(\pm 1)} \sim A^{(\pm)} / (\bar{\Delta}_l^{3/5} N_s^2). \quad (1.196)$$

Порівняння значень (1.176) і (1.196) показує, що амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік зростають в області АР навіть швидше, ніж амплітуди  $E_r^{(\pm 1)}$  основних гармонік. При цьому амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  залишаються в області АР меншими, ніж  $E_r^{(\pm 1)}$ , але розходження в порядку величини між  $E_r^{(\pm 1)}$  і  $E_r^{(\pm 3)}$  не є таким значним в межах області АР, як поза нею.

Тепер можна також оцінити, що перетворення (1.179) у (1.183) і (1.183) у (1.184) справедливі з точністю  $\Delta_2^{2/5} \ll 1$ .

Знайдемо умови, за яких структура локального АР для хвиль з резонансними значеннями (1.64) аксіального хвильового числа і поперічного номера моди основних гармонік визначається саме слабкою гвинтовою неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , а не інерцією електронів, іонним ларморівським радіусом чи зіткненнями. Наведені слабкі ефекти можуть бути легко враховані в (1.184) шляхом наступної заміни:

$$\varepsilon_1^{(0)} - N_s^2 \rightarrow \varepsilon_1^{(0)} - N_s^2 + i\varepsilon_1^{(c)} + (\varepsilon_T + \varepsilon_1^{(0)} / \varepsilon_3) c^2 / \omega^2 \partial^2 / \partial r^2. \quad (1.197)$$

Тут доданок  $(i\varepsilon_1^{(c)})$  наведений в підрозділі 1.3 формулою (1.124) якраз і враховує зіткнення між частинками плазми [184]. Коефіцієнт  $\varepsilon_T$  у заміні (1.197) також виписаний у підрозділі 1.3 (див. формулу (1.126)), він враховує скінченний іонний ларморівський радіус [185]. Інерція електронів також врахована в (1.197) через компоненту  $\varepsilon_3$  тензора діелектричної проникливості, для якої можна скористатись наведеними в підрозділі 1.3 визначеннями (1.127) – (1.130).

Аналіз основного рівняння (1.184) з урахуванням заміни (1.197) дозволяє

зробити висновок про те, що вплив слабкої гвинтової неоднорідності  $\vec{B}_0$  на структуру АР є суттєвішим за вплив, зокрема, скінченного ларморівського радіуса іонів і інерції електронів, якщо виконана наступна нерівність,

$$\bar{\Delta}_l^{12/5} \gg (\rho_{Li}/a)^2. \quad (1.198)$$

Ця умова може бути виконаною в периферійній плазмі, де гвинтова неоднорідність  $\vec{B}_0$  істотніша, і плазма - холодніша, ніж у центрі. Умова (1.198) може бути інтерпретована в такий спосіб. Радіальне відхилення  $r-r_A$  магнітної поверхні (1.4) від циліндра із середнім радіусом більше, ніж добре відома для випадку прямого магнітного поля характерна ширина  $(\rho_{Li}^2 a^*)^{1/3}$  області АР.

Таким чином, у цьому підрозділі представлено результати теоретичного дослідження структури АР у циліндричній плазмі, поміщеній в гвинтове магнітне поле (1.3), для хвилі з резонансними значеннями (1.64) аксіальних хвильових векторів і пологідних номерів моди основних гармонік. Розподіл електромагнітних полів у межах області АР визначений і проаналізований з урахуванням неоднорідності гвинтового магнітного поля, інерції електронів, ларморівського радіуса іонів і зіткнень. Оцінено за порядком величини ширину АР і характерні значення амплітуд основних (1.195) і сателітних (1.196) гармонік в області АР. Наступні висновки можуть бути зроблені в результаті виконаного дослідження.

Гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля викликає зв'язок просторових гармонік електромагнітних хвиль з різними значеннями аксіальних хвильових векторів і пологідних хвильових чисел. Зокрема, у гвинтовому магнітному полі з довжиною  $L$  кроку гвинтового провідника і мультиполярністю  $l$  гармоніки електромагнітної хвилі з резонансними значеннями  $k_z = \pm \pi l / L$  аксіального хвильового вектора і  $m = \mp l / 2$  пологідного номера моди належать до одного хвильового пакету (див. рівняння (1.175)), у якому ми врахували також дві найближчі сателітні гармоніки з аксіальними хвильовими числами  $k_z = \pm 3\pi l / L$  і пологідними номерами мод  $m = \mp 3l / 2$ .

У цьому підрозділі здобуто умову (1.198), за якої просторовий розподіл еле-

ктромагнітних хвиль з резонансними значеннями аксіального хвильового числа і поїдного номера моди в межах області локального АР визначається саме модуляцією радіального компонента утримуючого магнітного поля, а не інерцією електронів чи скінченням іонним ларморівським радіусом. Нерівність (1.198) може бути виконана в холодній периферійній плазмі, де модуляція утримуючого магнітного поля найбільш яскраво виражена. Як відомо, область локального АР зсувається до периферії плазми при зростанні густини плазми, що відбувається при одержанні плазми в термоядерних пристроях. Характерна ширина області АР є більшою у випадку виконання умови (1.198), ніж у прямому магнітному полі за однакових інших умов.

Амплітуди сателітних гармонік зростають при наближенні до області АР навіть швидше, ніж амплітуди основних гармонік. Саме тому розрив полів електромагнітних хвиль, що має місце в холодному наближенні в прямому магнітному полі, усувається в гвинтовому магнітному полі. Характерне значення (1.195) радіального електричного поля електромагнітної хвилі менше, ніж у прямому магнітному полі за однакових інших умов.

У цьому підрозділі обчислено і проаналізовано ширину щілини в альфвенівському континуумі, яка обумовлена періодичною гвинтовою неоднорідністю утримуючого магнітного поля. Розрахунки виконано на основі підходу, запропонованого А. Єлфімовим [22], що відрізняється від методу, що його використано в [123]. Показано, що щілина виникає внаслідок зачеплення просторових гармонік електромагнітної хвилі з резонансними значеннями (1.64) аксіальних хвильових чисел і поїдних номерів моди в гвинтовому магнітному полі. Гвинтова модуляція поздовжньої складової утримуючого магнітного поля є фізичною причиною цього явища.

Відзначимо також, що сателітні альфвенівські резонанси (у яких обидві сателітні гармоніки хвилі (1.175) з амплітудами  $E_r^{(\pm 3)}$  трансформуються в дрібномаштабні кінетичні хвилі) розташовані глибше в плазмі, де густина плазми вище, ніж в основному АР, у дев'ять разів. Тому можна очікувати, що додаткове нагрівання плазми поблизу сателітного АР для МГД хвиль, у яких основні гармоніки



характеризуються аксіальною довжиною хвилі  $2L/l$  і похідним номером моди  $l/2$ , буде істотним [149, 151].

### 1.6. Структура сателітного альфвенівського резонансу на периферії плазми, що міститься в сильному аксіальному магнітному полі і помірному полі з гвинтовою симетрією

У Підрозділі 1.3 було показано можливість додаткового нагрівання плазми торсатронів поблизу сателітних альфвенівських резонансів (САР) за умови, що гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля є настільки слабкою, що структура САР визначається скінченням іонним ларморівським радіусом або інерцією електронів, як це зазвичай має місце і в основному АР в разі прямого магнітного поля. В цьому підрозділі розглянуто тонку структуру САР в утримуючому магнітному полі з помірною гвинтовою складовою, коли ця структура визначається саме періодичною неоднорідністю плазми, а не іншими слабкими ефектами [151, 176, 190].

Для визначення розподілу полів МГД хвилі поблизу САР (1.112) скористаємось системою рівнянь (1.65) – (1.69). Виходячи із симетрії задачі, розв'язок цієї системи рівнянь шукаємо у вигляді хвильового пакета

$$E_r = \left[ E_r^{(0)}(r) + E_r^{(+1)}(r)e^{il\theta} + E_r^{(+2)}(r)e^{2il\theta} \right] \exp i(k_z z + m\vartheta - \omega t). \quad (1.199)$$

У ньому поряд з основною гармонікою  $\propto \exp(ik_z z)$ , збуджуваною антеною, і першою сателітною гармонікою  $\propto \exp[i(k_z - k_s)z]$ , яка у холодній плазмі в прямому магнітному полі має в області САР особливість,  $E_r^{(+1)} \propto \left[ \varepsilon_1^{(0)} - (N_z - N_s)^2 \right]^{-1}$ , враховуємо також і другу сателітну гармоніку  $\propto \exp i(k_z - 2k_s)z$ , тому що гвинтова неоднорідність утримуючого магнітного поля стелларатора призводить до зачеплення  $E_r^{(+1)}$  насамперед з  $E_r^{(0)}$  і  $E_r^{(+2)}$ .

При аналізі системи рівнянь (1.65) – (1.69) використовуємо наближення вузького шару [53], зокрема, вважаємо ширину резонансної області  $\delta r$  малою в порівнянні з радіальним масштабом  $a^*$ , на якому змінюється густина плазми, а та-

кож вважаємо, що зміна полів уздовж радіальної координати поблизу резонансу значно перевершує зміну уздовж пологої і аксіальної координат.

З урахуванням викладених припущень виводимо із системи рівнянь (1.65) – (1.69) наступну систему рівнянь, що зачіплюються, для амплітуд  $E_r^{(0)}$ ,  $E_r^{(+1)}$  і  $E_r^{(+2)}$  гармонік з пакету (1.199),

$$-N_s(2N_z - N_s)E_r^{(0)} + i\varepsilon_2^{(0)}E_g^{(0)} = (2N_z - N_s)\frac{\alpha r \bar{\Delta} c}{2\omega} \frac{dE_r^{(+1)}}{dr} + \frac{\alpha^2 r^2 \bar{\Delta}^2 c^2}{4\omega^2} \frac{d^2 E_r^{(+2)}}{dr^2}, \quad (1.200)$$

$$\left[ \varepsilon_1^{(0)} - (N_z - N_s)^2 + \beta \frac{d^2}{dr^2} \right] E_r^{(+1)} + 0,5(\varepsilon_1^{(1)} + \bar{\Delta} \varepsilon_2^{(0)}) E_r^{(+2)} = A^{(+)}, \quad (1.201)$$

$$E_r^{(+2)} = -\frac{r \bar{\Delta}}{2l} \frac{dE_r^{(+1)}}{dr}. \quad (1.202)$$

Тут і надалі індекс  $l$  у величин  $\bar{\Delta}_l$  і  $\Delta_l$ , які визначені формулами (1.70), опускаємо для спрощення запису. Малий коефіцієнт  $\beta$  при другій похідній в (1.201) дорівнює,

$$\beta = \frac{c \alpha r^2 \bar{\Delta}^2}{2\omega l} (N_z - N_s) \Big|_{r_A^{(+)}}. \quad (1.203)$$

Права частина рівняння (1.201) повільно змінюється поблизу САР,

$$A^{(+)} = \left\{ -i\varepsilon_2^{(0)} E_g^{(+1)} + \frac{i}{2} \bar{\Delta} \varepsilon_1^{(0)} E_g^{(0)} - \frac{i}{2} \varepsilon_2^{(1)} E_g^{(0)} + \frac{i}{2} \bar{\Delta} N_z B_r^{(0)} - \frac{c \bar{\Delta}}{2\omega} \frac{dB_z^{(0)}}{dr} - \frac{c(m+l)}{\omega r} B_z^{(+1)} \right\} \Big|_{r_A^{(+)}}. \quad (1.204)$$

За порядком величини  $A^{(+)} \sim \bar{\Delta} (N_z - N_s)^2 E_g^{(0)}$ .

Нехтуючи в (1.201) внаслідок наближення вузького шару доданком  $\propto E_r^{(+2)}$ , одержуємо неоднорідне рівняння Ейрі. Його розв'язок, що зменшується при віддаленні від САР, а також переносить енергію від САР, має наступний вигляд:

$$E_r^{(+1)} = -ik_1 a^* (N_z - N_s)^{-2} A^{(+)} u_0(\xi_s), \quad (1.205)$$

де

$$u_0(\xi) = s \int_0^\infty \exp[is(t\xi + t^3/3)] \cdot dt, \quad (1.206)$$

$$\xi_s = k_1(r - r_A^{(+)}), \quad k_1 = \left( (-1/\beta) d\varepsilon_1^{(0)} / dr \right)_{r_A^{(+)}}^{1/3} = |k_1| e^{i\psi}. \quad (1.207)$$

Напрямок, у якому поширюється дрібномасштабна хвиля, визначається параметром  $s$ ,

$$s = \text{sgn} \left[ \text{Re}(k_1) d\varepsilon_1^{(0)} / dr \Big|_{r_A^{(+)}} \right]. \quad (1.208)$$

Поведінку  $\text{Re}[u(\xi)]$  з точністю до коефіцієнта наведено на Рис. 1.10.

Ширина резонансної області  $\delta r \sim k_l^{-1}$  визначається в цьому випадку ступенем неоднорідності утримуючого магнітного поля, за порядком величини

$$\delta r \sim a * \bar{\Delta}^{2/3} \ll a. \quad (1.209)$$

Поза областю САР амплітуда  $E_r^{(+2)}$  другої сателітної гармоніки є величиною другого порядку малості  $E_r^{(+2)} \sim \Delta E_r^{(+1)} \sim \Delta^2 E_r^{(0)}$  [161]. При наближенні до області САР амплітуда  $E_r^{(+2)}$  зростає різкіше, ніж навіть  $E_r^{(+1)}$ , а саме  $E_r^{(+2)} \propto [\varepsilon_1^{(0)} - (N_z - N_s)^2]^2$ . Внаслідок цього обмежується зростання першої сателітної гармоніки. В області САР амплітуди сателітних гармонік є значно більшими, ніж поза цією областю. За порядком величини

$$E_r^{(+2)} \sim \Delta^{1/3} E_r^{(+1)} \sim \Delta^{2/3} E_r^{(0)}, \quad (1.210)$$

що підтверджує правомірність нехтування доданком  $\propto E_r^{(+2)}$  у рівнянні (1.201). Ці ж оцінки вказують на те, що обидві сателітні гармоніки нехтовно слабо впливають на радіальний розподіл  $E_r^{(0)}(r)$  навіть в області САР: права частина рівняння (1.200) дорівнює за порядком величини  $\sim \Delta^{2/3} N_z^2 E_r^{(0)}$ .

Подібно до того, як в основному АР азимутальна компонента електричного поля МГД хвилі має слабку особливість,  $E_g^{(0)} \propto \ln|\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2|$ , амплітуда першої сателітної гармоніки азимутального електричного поля  $E_g^{(+1)}$  слабо змінюється поблизу САР,

$$\frac{dE_g^{(+1)}}{dr} \approx \frac{m+l}{r} E_r^{(+1)}. \quad (1.211)$$

Порядок величини цієї проекції електричного поля хвилі в області САР,

$E_g^{(+1)} \sim \Delta E_g^{(0)}$ , залишається таким самим, як і поза цією областю.

Амплітуда першої сателітної гармоніки аксіальної компоненти електричного поля  $E_z^{(+1)}$  МГД хвилі має в області САР більш високий ступінь особливості, ніж  $E_r^{(+1)}$ , а саме  $E_z^{(+1)} \propto [\varepsilon_1^{(0)} - (N_z - N_s)^2]^2$ . Це можна побачити, розглянувши зв'язок  $E_z^{(+1)}$  з  $E_r^{(+1)}$ , що випливає з рівнянь Максвелла,

$$E_z^{(+1)} \approx \frac{ic^2(k_z - k_s)}{\omega^2 \varepsilon_3} \frac{dE_r^{(+1)}}{dr}. \quad (1.212)$$

З іншого боку, при виведенні системи рівнянь (1.65) – (1.69) було знехтувано інерцією електронів,

$$|\beta| \gg |c^2 \varepsilon_1^{(0)} / (\omega^2 \varepsilon_3)|, \quad (1.213)$$

і скінченністю ларморовського радіуса іонів,

$$\beta \gg \varepsilon_T. \quad (1.214)$$

Величина  $\varepsilon_T$  (1.126) в (1.214) враховує скінченність  $\rho_{Li}$  [185]. Співвідношення між амплітудами  $E_z^{(+1)}$  і  $E_r^{(+1)}$  першої сателітної гармоніки в області САР,

$$\left| \frac{E_z^{(+1)}}{E_r^{(+1)}} \right| \sim \left( \frac{c^2 \varepsilon_1^{(0)}}{\beta \omega^2 \varepsilon_3} \right)^{1/3} \left( \frac{\varepsilon_1^{(0)}}{\varepsilon_3} \right)^{2/3}, \quad (1.215)$$

складається з двох співмножників. Перший з них є малим у силу нерівності (1.213), а другий - завжди малий для МГД хвиль.

Порахуємо тепер ВЧ потужність (1.141), яка поглинається поблизу точки САР на одиниці довжини плазмового шнура за умов, коли структура САР визначається гвинтовою неоднорідністю утримуючого магнітного поля. Та частина потужності, що обумовлена роботою поля над радіальними ВЧ – струмами, визначається виразом (1.142). Вираз для тієї частини потужності, яка пов'язана з роботою поля над аксіальними ВЧ струмами, співпадає з виразом (1.143) отриманим в Підрозділі 1.3 за умов, коли структура АР визначається інерцією електронів або скінченням іонним ларморовським радіусом, при заміні в останньому хвильового вектора дрібномасштабної електромагнітної хвилі  $k_l$  величиною (1.207).

Здобуті в цьому Підрозділі результати дослідження тонкої структури САР

та поглинання ВЧ потужності поблизу САР переходять в ті, що здобуті в [149] при врахуванні зіткнень, скінченного ларморівського радіуса іонів і інерції електронів. Для врахування зазначених вище ефектів, досить зробити в (1.201) наступну заміну:

$$\beta \frac{d^2}{dr^2} \rightarrow i\varepsilon_1^{(c)} + \left( \beta + \varepsilon_T + \frac{c^2 \varepsilon_1^{(0)}}{\omega^2 \varepsilon_3} \right) \frac{d^2}{dr^2}, \quad (1.216)$$

де доданок  $i\varepsilon_1^{(c)}$  враховує зіткнення частинок [184]. Його величину (1.124) наведено в Підрозділі 1.3. Внаслідок такої заміни змінюється аргумент  $\xi$  у розв'язку (1.206) рівняння (1.201),

$$\xi_s \rightarrow \xi = k_2 (r - r_A^{(+)} - i\eta), \quad (1.217)$$

$$k_1 \rightarrow k_2 = \left( -\frac{d\varepsilon_1^{(0)}}{dr} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \varepsilon_T + \beta + \frac{c^2 \varepsilon_1^{(0)}}{\omega^2 \varepsilon_3} \right)^{-\frac{1}{3}} \Big|_{r_A^{(+)}} , \quad (1.218)$$

$$\eta = -k_2 \varepsilon_1^{(c)} \left( d\varepsilon_1^{(0)} / dr \right)^{-1}_{r_A^{(+)}} . \quad (1.219)$$

Із зростанням температури плазми в області САР (за інших рівних умов) вплив скінченного ларморівського радіуса іонів і інерції електронів на структуру САР збільшуються (сильні нерівності (1.213) і (1.214) втрачають силу), а потім і перевершує вплив неоднорідності утримуючого магнітного поля (сильні нерівності (1.213) і (1.214) переходять у протилежні). При цьому резонансна область стає ширшою і відповідне дрібномасштабне радіальне хвильове число визначається виразом (1.136). Амплітуди сателітних гармонік при цьому стають меншими, за порядком величини вони дорівнюють (порівн. з (1.210))

$$E_r^{(+2)} \sim \Delta (a^* / \rho_{Li})^{2/3} E_r^{(+1)} \sim \Delta^2 (a^* / \rho_{Li})^{4/3} E_r^{(0)} . \quad (1.220)$$

Дослідимо далі вплив стрикційної нелінійності і параметричної іонної циклотронної турбулентності на структуру САР. Якщо хвиля накачування досить потужна, то вплив нелінійних ефектів на розподіл полів МГД хвилі в області САР може виявитися істотним. У цьому Підрозділі досліджується вплив стрикційної нелінійності, бо саме вона відіграє вирішальну роль для швидких хвильових про-

цесів (коли фазова швидкість хвилі  $v_\phi > v_{Ti}$ ). Нелінійність на другій гармоніці переважає для повільних хвильових процесів [192, 193],  $v_\phi \leq v_{Ti}$ . Стрикція змінює густину плазми,  $n(r) \rightarrow n_{NL}$ ,

$$n_{NL} = n(r) \exp(-U/T). \quad (1.221)$$

Потенційна енергія частинок [194] у полі хвилі накачування набуває наступного вигляду у випадку неоднорідного (1.3) гвинтового утримуючого магнітного поля:

$$U = U^{(0)} + U^{(2)}, \quad (1.222)$$

де

$$U^{(0)} = \sum_{\alpha} \left[ e_{\alpha}^2 n_{\alpha} / (4m_{\alpha} n_e (\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)) \right] \times \left[ |E_r^{(0)}|^2 + |E_g^{(0)}|^2 + i(\omega_{c\alpha}/\omega) (E_r^{(0)*} E_g^{(0)} - E_r^{(0)} E_g^{(0)*}) \right], \quad (1.223)$$

малий доданок  $U^{(2)} \propto \bar{\Delta}^2$  швидко змінюється в області САР,

$$U^{(2)} = \sum_{\alpha} \left[ e_{\alpha}^2 n_{\alpha} / (4m_{\alpha} n_e) \right] \left[ |E_r^{(+1)}|^2 / (\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2) + |E_z^{(+1)}|^2 / \omega^2 \right]. \quad (1.224)$$

Поле  $E_z^{(0)}$  нехтовно мале в області САР. Проте, як впливає з аналізу структури САР у лінійному за амплітудою хвилі накачування наближенні, другим доданком у квадратних дужках у (1.224) можна знехтувати, тільки якщо

$$|(k_z - k_s) k_2 c^2 / (\omega^2 \varepsilon_3)| \ll 1. \quad (1.225)$$

Нерівність (1.225) виконується, наприклад, якщо структура САР визначається неоднорідністю  $\vec{B}_0$  (див. нерівності (1.213) і (1.214)).

У силу припущення про слабкість стрикції,  $U \ll T$ , досить врахувати заміну  $n(r) \rightarrow n_{NL}$  в рівнянні (1.201) тільки для різниці  $(\varepsilon_1^{(0)} - (N_z - N_s)^2)$ , яка є малою в області САР,

$$\varepsilon_1^{(0)} - (N_z - N_s)^2 \Rightarrow \left( \partial \varepsilon_1^{(0)} / \partial r \right)_{r_A^{(+)}} (r - r_A^{(+)}) + (\varepsilon_1^{(0)} - 1) (-U/T) + O(U^2/T^2). \quad (1.226)$$

Оскільки амплітуди основних гармонік полів МГД хвилі слабо змінюються в області САР, врахування стрикційного потенціалу  $U^{(0)}$  (1.223) призводить тільки до зсуву області САР на малу відстань від осі плазми

$$\delta r_{cmp} = (\varepsilon_1^{(0)} - 1) (U^{(0)} / T) \left( d\varepsilon_1^{(0)} / dr \right)_{r_A^{(+)}}^{-1}. \quad (1.227)$$

Стрикційна нелінійність могла б уплинути на розподіл полів в області САР, якби виконувалася наступна нерівність,

$$\left|(\varepsilon_1^{(0)} - 1) \left( U^{(2)} / T \right) \right| > |\beta k_1^2|. \quad (1.228)$$

Умова (1.228), однак, не виконується, тому що вона рівнозначна нерівності  $|E_r^{(+1)}|^2 (\sim \bar{\Delta}^{2/3} E_r^{(0)}) > \bar{\Delta}^{2/3} E_0^2$ , що суперечить вихідному припущенню про слабкість стрикції ( $U \ll T$ ). Тут

$$\frac{1}{E_0^2} = - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 n_{\alpha}}{4 m_{\alpha} n_e T (\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)}. \quad (1.229)$$

Розглянемо зворотний вплив кінетичних параметричних іонних циклотронних нестійкостей плазми на хвилю накачування, що збуджує їх. На нелінійній стадії розвитку циклотронних коливань іони розсіюються на турбулентних пульсаціях, і можна говорити про виникнення ефективної частоти розсіювання - ефективної частоти зіткнень [145]. Врахування турбулентного поглинання МГД хвиль може бути здійснено шляхом заміни частоти зіткнень частинок плазми ефективною частотою зіткнень з турбулентними пульсаціями,

$$\varepsilon_1^{(c)} \rightarrow \varepsilon_{1eff} = \frac{16\pi n T_i}{B_0^2} \left( \frac{c|E|}{v_{Ti} B_0} \right)^3 \left( \frac{c}{v_{Ti}} \right)^2 \left( 1 + \frac{k_z^2 c^2}{\omega_{pi}^2} \right). \quad (1.230)$$

Оскільки ефективна частота розсіювання іонів на турбулентних пульсаціях визначається амплітудою електричного поля хвилі накачування, а амплітуда сателітної гармоніки є малою в порівнянні з амплітудою основної гармоніки, то наявність САР не може спричинити визначального впливу на турбулентне нагрівання плазми в стеллараторі. Проте врахування амплітуди  $E_r^{(+1)}$  першої сателітної гармоніки призводить до помітного збільшення  $\varepsilon_{1eff}$  в області САР у порівнянні з його значенням поза цією областю, за порядком величини  $\varepsilon_{1eff} \rightarrow \varepsilon_{1eff} (1 + 1.5 \bar{\Delta}^{2/3})$ .

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі проведено дослідження розподілу електромагнітних полів МГД хвиль в області сателітних альфвенівських резонансів (1.112) у периферійній плазмі стелларатора (див. вирази (1.205) - (1.207)). На додаток до результатів [149], де структура САР визначена з урахуванням зіткнень

частинок плазми, скінченного ларморівського радіуса іонів і інерції електронів, у цьому розділі вивчений вплив на розподіл електромагнітних полів в області САР наступних ефектів:

- \* зв'язок просторових гармонік полів хвилі, що обумовлений гвинтовою неоднорідністю утримуючого магнітного поля (1.3),
- \* слабка стрикційна нелінійність,
- \* параметрична іонна циклотронна турбулентність.

Здобуті тут результати асимптотично переходять (див. заміни (1.216) - (1.219) і оцінку (1.220)) у ті, що наведені в [149], якщо неоднорідність  $\vec{B}_0$  є малою.

Визначено умови (1.213) і (1.214), за яких вплив неоднорідності  $\vec{B}_0$  на структуру САР є сильнішим, ніж скінченність величини  $\rho_{Li}$  та інерції електронів. Ці умови можуть виконуватися в периферійній плазмі стелларатора, де відмінність форми магнітних поверхонь від круглого циліндра є сильнішою, а плазма є холоднішою, ніж це має місце у глибині плазмового шнура.

Амплітуди сателітних гармонік в області САР є більшими у випадку, коли структура САР визначається неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , ніж коли переважає вплив скінченності  $\rho_{Li}$  та інерції електронів (порівн. (1.210) і (1.220)). Незважаючи на те, що в області САР амплітуда  $E_r^{(+l)}$  першої сателітної гармоніки радіального електричного поля МГД хвилі різко підростає, вона залишається одного порядку чи менше амплітуди основної гармоніки.

Врахування амплітуди  $E_r^{(+l)}$  першої сателітної гармоніки в області САР призводить до помітного збільшення турбулентного поглинання хвилі накачування в цій області.

Врахування впливу неоднорідності  $\vec{B}_0$  на структуру САР не змінює визначене в [149] значення ВЧ потужності, що поглинається поблизу САР, але проведений в цьому Підрозділі розгляд узагальнює проведений у [149] аналіз нагрівання плазми поблизу САР у стелларатора на випадок, коли цей вплив порівняний чи навіть сильніший за вплив скінченності ларморівського радіуса іонів і інерції



електронів.

Слабка стрикційна нелінійність призводить до малого зсуву (1.227) положення області САР, але її вплив на розподіл полів МГД хвилі в області САР є малим.

Відзначимо, що швидкі магнітозвукові хвилі (ШМЗХ) з аксіальним хвильовим числом  $|k_z| > \omega/c$  і частотою  $\omega > \omega_{ci}$  на відміну від АХ узагалі не мають основного АР (1.76). (Конверсія і резонансне поглинання ШМЗХ з  $|k_z| < \omega/c$  і частотою  $\omega > \omega_{ci}$  в периферійній плазмі досліджені в [187].) Якщо все-таки при цьому  $|k_z - k_s| < \omega/c$ , то для таких ШМЗХ у плазмі стелларатора виникає САР (1.112). Оскільки в глибині термоядерної плазми  $\omega_{pi}^2 > \omega_{ci}^2$ , значить, точка  $r=r_A^{(+)}$  цього САР розташована на периферії плазмового шнура. Тому відзначений тут САР може зробити помітний внесок до небажаного нагрівання периферії плазми стелларатора.

## 1.7. Висновки до першого розділу

У цьому розділі досліджено вплив тривимірної гвинтової просторової періодичної неоднорідності утримуючого магнітного поля  $\vec{B}_0$ , а отже, і плазми у пастках керованого термоядерного синтезу на поширення, конверсію і поглинання альфвенівських і швидких магнітозвукових хвиль. Показано, що гвинтова неоднорідність  $\vec{B}_0$  спричиняє зачеплення окремих просторових гармонік електромагнітних хвиль, внаслідок чого вони поширюються у вигляді хвильових пакетів. У загальному випадку в цьому пакеті поряд з основною гармонікою враховано дві сателітні гармоніки, чії амплітуди визначено як малі величини першого порядку. При цьому поправку до власної частоти МГД хвиль, яку обумовлено гвинтовою неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , пораховано як малу величину другого порядку малості.

Показано, що у випадку, коли аксіальна довжина основної гармоніки електромагнітної хвилі вдвічі перевищує крок гвинтового провідника, і її азимутальний номер є вдвічі менший за мультиполярність стелларатора, гвинтова неоднорід-

рідність  $\vec{B}_0$  може спричинити розщеплення спектрів МГД коливань плазми. При цьому в хвильовому пакеті поряд з двома основними гармоніками, які характеризуються протилежними значеннями аксіального хвильового числа і азимутального номера моди, враховано також дві сателітні гармоніки. Поправку до власної частоти МГД хвиль, яку обумовлено гвинтовою неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , пораховано як малу величину першого порядку малості.

Показано можливість додаткового нагрівання плазми стеллараторів поблизу сателітних альфвенівських резонансів. Просторовий розподіл полів електромагнітних хвиль поблизу САР визначено як за умов слабкої гвинтовою неоднорідності  $\vec{B}_0$ , коли цей розподіл визначається інерцією електронів і тепловим рухом іонів, так і за умов помірної гвинтової неоднорідності  $\vec{B}_0$ , коли цей розподіл визначається саме просторовою неоднорідністю плазми. Розраховано високочастотну потужність, яка поглинається плазмою поблизу САР. Встановлено умови, за яких це додаткове нагрівання плазми може бути істотним.

Встановлено, що гвинтова неоднорідність  $\vec{B}_0$  усуває розрив розв'язків рівнянь Максвелла для електромагнітних полів поблизу локального альфвенівського резонансу (цей розрив добре відомий у разі нехтування тепловим рухом частинок плазми, зіткненнями, інерцією електронів, слабкою не лінійністю, тощо). Розраховано просторовий розподіл електромагнітних полів поблизу АР, а також ВЧ потужність, яка поглинається плазмою поблизу АР. Дослідження виконано також і для випадку, коли дві основні гармоніки, які зв'язані у хвильовому пакеті гвинтовою неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , мають свої АР в одному місці.

## РОЗДІЛ 2

ПОШИРЕННЯ, КОНВЕРСІЯ І ПОГЛИНАННЯ МАГНІТОГІДРОДИНАМІЧНИХ  
ХВИЛЬ У ПЛАЗМОВОМУ ШНУРІ, ЩО МІСТИТЬСЯ В ЗОВНІШНЬОМУ  
МАГНІТНОМУ ПОЛІ ЗІ СЛАБКИМ ГОФРУВАННЯМ

Стале магнітне поле  $\vec{B}_0 = B_{0r}\vec{e}_r + B_{0z}\vec{e}_z$  (у циліндричних координатах), яке використовують для утримання плазми в пристроях КТС, часто буває гофрованим (див. рис. 2.1.). Його радіальний і аксіальний компонент у випадку слабого гофрування ( $|\varepsilon_m| \ll 1$ ) дорівнюють, відповідно:

$$B_{0r} = B_0(\varepsilon'_m/k_m) \sin(k_m z), \quad B_{0z} = B_0[1 + \varepsilon_m(r) \cos(k_m z)], \quad (2.1)$$

де  $\varepsilon'_m \equiv d\varepsilon_m/dr$ ,  $k_m = 2\pi/L$ ,  $L$  - період гофрування.

Параметр гофрування  $\varepsilon_m$  зазвичай є малою величиною,  $|\varepsilon_m| \ll 1$ , у сучасних термоядерних пристроях. Наприклад, він досягає величини  $\sim 5 \cdot 10^{-2}$  поблизу межі плазми в токамаку ASDEX-U, Німеччина [33, 195]. У Helias конфігурації [36 – 39]

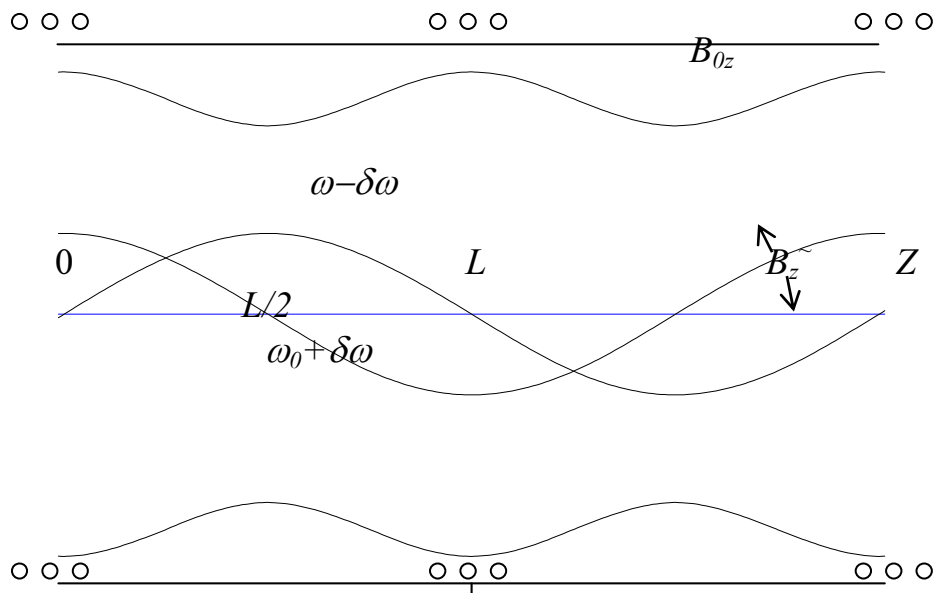


Рис. 2.1. Схематичне зображення залежності модуля утримуючого магнітного поля від аксіальної координати і розподілу стоячих власних МГД хвиль у випадку гофрованого магнітного поля.

“дзеркальна” неоднорідність планується більш значною,  $\varepsilon_m \sim 0.13$ .

Відзначимо, що рівняння (2.1) не забезпечують автоматичне виконання фундаментального рівняння  $\text{div } \vec{B}_0 = 0$ . Підставивши визначення (2.1) до цього фундаментального рівняння, ми одержуємо співвідношення, що визначає залежність малого параметра  $\varepsilon_m$  від радіальної координати  $r$ . Це співвідношення має вигляд рівняння Бесселя. Розв'язання останнього рівняння дозволяє стверджувати, що  $\varepsilon_m$  є пропорційним до модифікованої функції Бесселя нульового порядку. Це означає, що  $\varepsilon_m$  можна вважати постійним, якщо період гофрування є великим у порівнянні з малим радіусом камери уловлювача. У протилежному випадку, якщо період гофрування є малим, величина  $\varepsilon_m$  зменшується приблизно за експонентою при віддаленні від межі плазми. При цьому неоднорідність утримуючого магнітного поля є істотною у вузькому шарі шириною  $k_b^{-1}$  поблизу металевої стінки.

Магнітні силові лінії, як відомо, є паралельними до вектора напруженості утримуючого магнітного поля  $\vec{B}_0$  в кожній точці. Векторна форма цієї умови,

$$[\vec{B}_0, d\vec{r}] = 0, \quad (2.2)$$

дає нам наступне рівняння для силових ліній у циліндричних координатах,

$$\frac{dr}{B_{0r}} = \frac{dz}{B_{0z}}. \quad (2.3)$$

Рівняння для магнітної поверхні одержуємо, інтегруючи рівняння (2.3) після підстановки до нього явних виразів (2.1) для  $B_{0r}$  і  $B_{0z}$ ,

$$r - r_0 = -\frac{\cos(k_b z)}{r} \int_0^r r \varepsilon_m dr + O(\varepsilon_m^2). \quad (2.4)$$

Беручи до уваги властивості  $\varepsilon_m(r)$  як модифікованої функції Бесселя, можна переписати рівняння (2.4) у наступній, більш зручній, формі,

$$r_0 = r - \cos(k_m z) (1 - 0.5 \varepsilon_m \cos(k_m z)) \varepsilon'_m / k_m^2 + O(\varepsilon_m^3). \quad (2.5)$$

У цьому розділі побудовано теорію поширення, конверсії і поглинання МГД хвиль з частотою  $\omega < |\omega_{ce}|, \omega_{pe}$  у плазмовому циліндрі, що знаходиться в гофрованому магнітному полі. Дослідження цього питання становить інтерес, головним чином, у зв'язку з задачею нагрівання плазми такими хвилями в плазмових улов-

лювачах з гофрованим магнітним полем. Розглядається випадок плазми низького тиску, для якої при дослідженні швидкої магнітозвукової і альфвенівської гілок МГДХ інерцією електронів можна знехтувати. У такій плазмі рівноважна густина  $n(r, z)$  може бути введена як функція однієї змінної, роль якої грає «номер» магнітної поверхні,  $n(r, z) = n(r_0)$ . Гофрування магнітного поля вважається слабким, що дозволяє використовувати теорію збурень при розв'язанні рівнянь Максвелла.

Компоненти  $\varepsilon_{l,2}$  тензора діелектричної проникливості холодної плазми, що визначають поширення МГДХ, зв'язують компоненти векторів електричної індукції  $\vec{D}$  і напруженості електричного поля  $\vec{E}$  хвилі в такий спосіб:

$$D_r + \gamma D_z = \varepsilon_l(1 + \gamma^2)E_r + i\varepsilon_2 \sqrt{1 + \gamma^2} E_\vartheta, \quad (2.6)$$

$$D_\vartheta = \varepsilon_l E_\vartheta - i\varepsilon_2 \sqrt{1 + \gamma^2} E_r, \quad (2.7)$$

де  $\gamma = B_{0r}/B_{0z}$ . Компоненти  $\varepsilon_l$  і  $\varepsilon_2$  тензора діелектричної проникливості холодної плазми за умови нехтування зіткненнями між частинками плазми визначені формулами (1.6). Надалі нам будуть потрібні вирази для  $\varepsilon_{l,2}$  з точністю до членів другого порядку малості за  $\varepsilon_m$ :

$$\varepsilon_{l,2}(r, z) = \varepsilon_{l,2}^{(0)}(r) + \varepsilon_{l,2}^{(1)}(r) \cos(k_m z) + \varepsilon_{l,2}^{(2)}(r); \quad (2.8)$$

де  $|\varepsilon_{l,2}^{(i+1)}| \sim |\varepsilon_m \varepsilon_{l,2}^{(i)}|$ . За відсутності гофрування ( $\varepsilon_m = 0$ ) компоненти  $\varepsilon_{l,2}$  визначаються виразами (1.8) і (1.11). Поправки першого порядку  $\varepsilon_{l,2}^{(1)}$  мають наступний вигляд:

$$\varepsilon_l^{(1)}(r) = \left( \frac{\partial \omega_{pi}^2}{\partial r} \right)_{|\varepsilon_m=0} \frac{\varepsilon'_m}{k_m^2} \sum \left( \omega^2 - \omega_{ci}^{(0)2} \right)^{-1} - 2\varepsilon_m \sum_i \frac{\omega_{pi}^2(r) \omega_{ci}^{(0)2}}{\left( \omega^2 - \omega_{ci}^{(0)2} \right)^2}, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_2^{(1)}(r) = \left( \frac{\partial \ln(\omega_{pi}^2)}{\partial r} \right)_{|\varepsilon_m=0} \frac{\varepsilon'_m}{k_m^2} \varepsilon_2^{(0)} - \varepsilon_m \sum_i \frac{\omega_{pi}^2(r) \omega \left( 3\omega_{ci}^{(0)2} - \omega^2 \right)}{\omega_{ci}^{(0)} \left( \omega^2 - \omega_{ci}^{(0)2} \right)^2}. \quad (2.10)$$

Поправки  $\varepsilon_{l,2}^{(2)}$  другого порядку до компонентів тензора діелектричної проникливості визначаються в такий спосіб:

$$\varepsilon_{l,2}^{(2)} = \frac{\partial \varepsilon_{l,2}}{\partial n} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \Big|_{\varepsilon_m=0} \frac{\varepsilon_m'^2}{4k_m^4} + \frac{\partial \varepsilon_{l,2}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r} \Big|_{\varepsilon_m=0} \frac{\varepsilon'_m \varepsilon_m}{4k_m^2} + \frac{\partial \varepsilon_{l,2}}{\partial B} \Big|_{\varepsilon_m=0} \frac{B_0 \varepsilon_m'^2}{4k_m^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 \varepsilon_{l,2}}{\partial B^2} \Big|_{\varepsilon_m=0} \left( \frac{B_0 \varepsilon_m}{2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varepsilon_{l,2}}{\partial B \partial n} \frac{\partial n}{\partial r} \Big|_{\varepsilon_m=0} \frac{B_0 \varepsilon_m \varepsilon'_m}{2k_m^2}. \quad (2.11)$$

До виразів (2.9) - (2.11) входить циклотронна частота іонів плазми, яка визначена за умови нехтування гофруванням магнітного поля,  $\omega_{ci}^{(0)} = eB_0/(m_i c)$ .

Введемо ортонормовану систему координатних векторів  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , зв'язану із силовими лініями  $\vec{B}_0$ : перший вектор є перпендикулярним до магнітних поверхонь,  $\vec{e}_1 = \nabla r_0 / |\nabla r_0|$ , другий вектор співпадає з азимутальним ортом в циліндричних координатах,  $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$ , третій вектор є паралельним до силових магнітних ліній,  $\vec{e}_3 = \vec{B}_0 / |\vec{B}_0|$ . Використання умов малості гофрування і малості інерції електронів ( $|\varepsilon_3| \rightarrow \infty$ ) при розв'язанні рівнянь Максвелла призводить до рівності нулю у всьому об'ємі плазми поздовжнього компонента електричного поля хвилі:  $E_3 \equiv (B_{0z} E_z + B_{0r} E_r) / |B_0| \rightarrow 0$ . Отримане звідси співвідношення між радіальним і аксіальним компонентами електричного поля хвилі дозволяє за умови нехтування зіткненнями між частинками плазми, інерцією електронів і ефектом скінченності ларморовського радіуса іонів записати спрощену систему рівнянь Максвелла у циліндричних координатах:

$$\frac{im}{r} \frac{B_{0r}}{B_{0z}} E_r - \frac{\partial E_g}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} B_r, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B_{0r}}{B_{0z}} E_r \right) = \frac{i\omega}{c} B_g, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_g) - \frac{im}{r} E_r = \frac{i\omega}{c} B_z, \quad (2.14)$$

$$B_{0z} \left( im B_z - r \frac{\partial B_g}{\partial r} \right) + B_{0r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r B_g) - im B_r \right) = \frac{\omega r}{ic} (\varepsilon_1 B_{0z} E_r + i \varepsilon_2 |B_0| E_g), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\omega}{ic} \left( \varepsilon_1 E_g - i \varepsilon_2 \frac{B_{0z}}{|B_0|} E_r \right). \quad (2.16)$$

Розв'язок системи рівнянь (2.12) – (2.16) має задовольняти наступним крайовим умовам. Поля хвилі мають бути обмеженими у всьому об'ємі камери, азимутальний компонент електричного поля МГД хвилі має дорівнювати нулю на

металевій поверхні камери  $r=b$ . Якщо плазмовий шнур відділений від камери вакуумним прошарком, то азимутальна компонента електричного поля і поздовжня компонента магнітного поля ( $B_3 \equiv B_{0z}B_z + B_{0r}B_r / |B_0|$ ) МГД хвилі повинні бути неперервними при переході через граничну магнітну поверхню.

## 2.1. Розщеплення спектрів МГД коливань плазми в гофрованому магнітному полі

У цьому підрозділі досліджено власні МГД коливання неоднорідного плазмового циліндра в резонансному випадку, коли аксіальна довжина МГД хвиль вдвічі перевищує період гофрування [33, 35, 158, 179]. Слабкість гофрування дозволяє скористатися при цьому теорією збурень для випадку вироджених спектрів.

Для розв'язання системи (2.12) – (2.16) нам стануть у нагоді вирази для компонентів  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  з точністю до доданків першого порядку малості за  $\varepsilon_m$ :

$$\varepsilon_{1,2}(r,z) = \varepsilon_{1,2}^{(0)}(r) + \varepsilon_{1,2}^{(1)}(r) \cos(k_m z) + O(\varepsilon_m^2). \quad (2.17)$$

Виходячи із симетрії задачі (див. співвідношення (2.17)) будемо шукати розв'язок системи рівнянь (2.12) – (2.16) для аксіального компонента магнітного поля МГДХ відповідно до відомої [58] процедури одержання секулярного рівняння (застосування теорії збурень у випадку виродженого спектра) у наступному вигляді:

$$B_z = [(C_0^{(+)} \psi_1^{(0)}(r) + C_1^{(+)} \psi_1^{(+)}(r)) \exp(ik_z z) + (C_0^{(-)} \psi_1^{(0)}(r) + C_1^{(-)} \psi_1^{(-)}(r)) \exp(-ik_z z) + \\ + C_3^{(+)} \psi_3^{(+)}(r) \exp(i3k_z z) + C_3^{(-)} \psi_3^{(-)}(r) \exp(-i3k_z z)] \exp[i(m\vartheta - \omega t)], \quad (2.18)$$

де поправки до амплітуд основних гармонік і амплітуди сателітних гармонік є малими величинами першого порядку,  $|C_{1,3}^{(\pm)} \psi_{1,3}^{(\pm)}| \sim |\varepsilon_m C_0^{(\pm)} \psi_1^{(0)}|$ ,  $m$  - азимутальний номер моди,  $k_z$  – аксіальне хвильове число основної гармоніки МГД хвилі. Ми будемо вважати, що  $k_z$  задовольняє резонансній умові

$$2k_z = k_m. \quad (2.19)$$

Інші компоненти магнітних і електричних полів МГД хвилі представимо у вигляді, аналогічному до (2.18).

Розв'яжемо систему рівнянь (2.12) – (2.16) у нульовому наближенні. За умови відсутності гофрування радіальна залежність аксіального компонента магнітного поля МГД хвилі  $\psi_j^{(0)}(r)$  ( $j=1,3$ ) визначається наступним рівнянням:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{k_j^2} \frac{\partial \psi_j^{(0)}}{\partial r} + q_j \psi_j^{(0)} = 0, \quad (2.20)$$

де

$$q_j \equiv q(jk_z, r) = 1 - \frac{m^2}{k_j^2 r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_j}{k_j^2} \right), \quad (2.21)$$

$$k_j^2 \equiv k_{\perp}^2(jk_z, r) = (\omega/c)^2 (\varepsilon_l^{(0)} - j^2 N_z^2) (1 - \mu_j^2), \quad (2.22)$$

$$\mu_j \equiv \mu(jk_z, r) = \varepsilon_2^{(0)} / (\varepsilon_l^{(0)} - j^2 N_z^2). \quad (2.23)$$

Тут  $N_z = ck_z/\omega$  - аксіальний показник заломлення для основної гармоніки.

Розподіл ВЧ полів МГД хвиль у плазмовому циліндрі з радіально неоднорідним профілем густини можна здобути з (2.20) числовими методами (див., напр., [13, 175]). Тому обмежені при  $r=0$  розв'язки  $\psi_j^{(0)}(r)$  рівняння (2.20), що відповідають хвилям з аксіальним хвильовим числом  $(jk_z)$ , і лінійно незалежні від них розв'язки  $\psi_{\square j}^{(0)}(r)$ , які мають при  $r=0$  особливість, будемо вважати відомими. Припускаємо, що профіль густини є таким, що в плазмі немає ані основного АР, у якому

$$\varepsilon_l^{(0)}(r) = N_z^2, \quad (2.24)$$

ані сателітних АР [147], у яких

$$\varepsilon_l^{(0)}(r) = (3N_z)^2. \quad (2.25)$$

У цьому випадку функції  $\psi_j^{(0)}(r)$  і  $\psi_{\square j}^{(0)}(r)$  можуть бути обрані дійсними.

Розв'яжемо систему рівнянь (2.12) – (2.16) у першому наближенні за малим параметром  $\varepsilon_m$ . Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння для амплітуд  $\psi_j^{(\pm)}(r)$  одержимо, підставивши компоненти  $E_{r,g}$  електричного і  $B_{r,g,z}$  магнітного полів МГД хвилі у вигляді (2.18) до системи рівнянь (2.12) – (2.16) і виділивши в ній доданки  $\propto \exp(ijk_z z)$  першого порядку малості за  $\varepsilon_m$ . Ці рівняння для  $\psi_j^{(\pm)}(r)$  мають вигляд



$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + q_j \right) C_j^{(\pm)} \psi_j^{(\pm)} = - \hat{G}_j^{(\pm)} C_0^{(\pm)} \psi_1^{(0)}, \quad (2.26)$$

де оператор  $\hat{G}_j^{(\pm)}$  визначається в такий спосіб:

$$\hat{G}_j^{(\pm)} C_0^{(\pm)} \psi_1^{(0)} = \frac{\omega}{cr} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{k_j^2} (F_j^{(\pm)} + \mu_j A_j^{(\pm)}) \right] + \frac{\omega m}{cr k_j^2} (A_j^{(\pm)} + \mu_j F_j^{(\pm)}). \quad (2.27)$$

Величини  $A_j^{(\pm)}$  і  $F_j^{(\pm)}$ , що входять до (2.27), для  $j=3$  дорівнюють

$$A_j^{(\pm)} = \frac{\varepsilon_l^{(1)}}{2} E_{r0}^{(\pm)} + \frac{i\varepsilon_2^{(1)}}{2} E_{g0}^{(\pm)} - \frac{jc^2}{4\omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon' E_{r0}^{(\pm)}) - \frac{\varepsilon' c^2}{4r\omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{r0}^{(\pm)}) - \frac{ic^2 m \varepsilon'}{4r\omega^2} E_{g0}^{(\pm)}, \quad (2.28)$$

$$F_j^{(\pm)} = \frac{\varepsilon_l^{(1)}}{2i} E_{g0}^{(\pm)} - \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} E_{r0}^{(\pm)} - \frac{jc^2 m \varepsilon'}{4\omega^2 r} E_{r0}^{(\pm)}. \quad (2.29)$$

Для визначення малої поправки першого порядку до амплітуди основних гармонік  $\psi_l^{(\pm)}(r)$  скористаємося для  $A_l^{(\pm)}$  і  $F_l^{(\pm)}$  виразами (2.28) і (2.29), у яких потрібно покласти  $j=l$  і усюди в правій частині зробити заміну верхніх індексів  $(\pm) \rightarrow (\mp)$ . Амплітуди основних гармонік радіального  $E_{r0}^{(\pm)}$  і азимутального  $E_{g0}^{(\pm)}$  компонентів електричного поля дорівнюють,

$$E_{r0}^{(\pm)} = C_0^{(\pm)} u(r) - \frac{\omega^2}{c^2 k_l^2} (A_l^{(\pm)} + \mu_l F_l^{(\pm)}), \quad (2.30)$$

$$E_{g0}^{(\pm)} = i C_0^{(\pm)} v(r) - \frac{i\omega^2}{c^2 k_l^2} (F_l^{(\pm)} + \mu_l A_l^{(\pm)}), \quad (2.31)$$

де

$$u(r) = \frac{-\omega}{c k_l^2} \left( \frac{m}{r} \psi_l^{(0)} + \mu_l \frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial r} \right), \quad (2.32)$$

$$v(r) = \frac{-\omega}{c k_l^2} \left( \frac{\mu_l m}{r} \psi_l^{(0)} + \frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial r} \right). \quad (2.33)$$

При обчисленні оператора  $\hat{G}_j^{(\pm)}$  (2.27) досить взяти амплітуди  $E_{r0}^{(\pm)}$  і  $E_{g0}^{(\pm)}$  з точністю до доданків нульового порядку за  $\varepsilon_m$ .

Обмежені при  $r = 0$  розв'язки рівняння (2.26) мають вигляд

$$C_j^{(\pm)} \psi_j^{(\pm)} = H_j^{(\pm)} \psi_j^{(0)} + \psi_j^{(0)} \int_r^a W_j^{-1} k_j^2 \hat{\psi}_j^{(0)} \hat{G}_j^{(\pm)} C_0^{(\pm)} \psi_1^{(0)} dr \quad (2.34)$$

$$-\tilde{\psi}_j^{(0)} \int_0^r W_j^{-1} k_j^2 \psi_j^{(0)} \hat{G}_j^{(\pm)} C_0^{(\pm)} \psi_l^{(0)} dr,$$

де  $a$  - радіус плазмового шнура в нульовому наближенні, вронскіан  $W_j$  функцій  $\psi_j^{(0)}$  і  $\tilde{\psi}_j^{(0)}$  дорівнює  $W_j = \psi_j^{(0)} \partial \tilde{\psi}_j^{(0)} / \partial r - \tilde{\psi}_j^{(0)} \partial \psi_j^{(0)} / \partial r$ . Константи інтегрування  $H_3^{(\pm)} \sim \varepsilon_m C_0^{(\pm)}$  визначаються з умови рівності нулю на металевій поверхні камери амплітуд  $E_{9l}^{(\pm)}$  сателітних (пропорційних  $\exp(\pm 3 i k_z z)$ ) гармонік азимутального електричного поля МГД хвилі,  $E_{9l}^{(\pm)}(b) = 0$ , де

$$E_{9l}^{(\pm)} = \frac{\omega^2}{i c^2 k_3^2} \left( \frac{c}{\omega} C_3^{(\pm)} \frac{\partial \psi_3^{(\pm)}}{\partial r} + F_3^{(\pm)} \right) - \frac{i \mu_3 \omega^2}{c^2 k_3^2} \left( \frac{c}{\omega} \frac{m}{r} C_3^{(\pm)} \psi_3^{(\pm)} + A_3^{(\pm)} \right). \quad (2.35)$$

Константи інтегрування  $H_l^{(\pm)} \sim \varepsilon_m C_0^{(\pm)}$  визначаються з умови

$$\int_0^b \psi_l^{(0)} C_l^{(\pm)} \psi_l^{(\pm)} r dr = 0, \quad (2.36)$$

яка означає, що енергія магнітного поля (2.18) МГД хвилі, обчислена з урахуванням доданків першого порядку малості за  $\varepsilon_m$ , збігається зі значенням, обчисленим у нульовому наближенні. У квантовій механіці [58] ця вимога відповідає виконанню умови нормування хвильової функції.

Здобудемо і проаналізуємо дисперсійне рівняння МГДХ у плазмі, що межує з гофрованою металевою камерою, тобто припустимо спочатку, що плазма повністю заповнює об'єм камери, що має форму граничної магнітної поверхні,

$$r = b(1 + \varepsilon_b \cos(2k_z z)), \quad (2.37)$$

де відповідно до визначення (2.4)

$$\varepsilon_b = \frac{-1}{b^2} \int_0^b r \varepsilon dr. \quad (2.38)$$

Крайова умова, що полягає в рівності нулю на металевій поверхні амплітуд  $E_{90}^{(\pm)}$  (2.31) основних (пропорційних  $\exp(\pm i k_z z)$ ) гармонік азимутального поля МГДХ, дозволяє здобути дисперсійне рівняння

$$D^{(0)2} - D^{(1)2} = 0, \quad (2.39)$$

де

$$D^{(0)} = \left\{ \frac{c}{\omega} \frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial r} + \mu_l \frac{c}{\omega} \frac{m}{r} \psi_l^{(0)} \right\} \Big|_{r=b}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} D^{(1)} = & \left\{ \frac{c}{\omega} \frac{\partial \psi_l^{(\pm)}}{\partial r} \frac{C_l^{(\pm)}}{C_0^{(\mp)}} - \mu_l \frac{c}{\omega} \frac{m}{r} \tilde{\psi}_l^{(\pm)} \int_0^b W_l^{-1} k_l^2 \psi_l^{(\pm)} \hat{G}_l^{(\pm)} \psi_l^0 d r \right. \\ & + \frac{\varepsilon_b b}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c}{\omega} \frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial r} + \mu_l \frac{c}{\omega} \frac{m}{r} \psi_l^{(0)} \right) + \frac{\psi_l^{(0)} c m}{\omega r (\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2)} \\ & \times \left[ \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} + \frac{c^2 m \varepsilon'}{4 r \omega^2} - \frac{\mu_l \varepsilon_l^{(1)}}{2} + \frac{c^2 \mu_l}{4 r \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon') \right] + \\ & \left. \frac{\mu_l c \varepsilon'}{2 \omega} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{m \psi_l^{(0)}}{k_l^2 r} + \frac{\mu_l}{k_l^2} \frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial r} \right) \right\} \Big|_{r=b}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Власну частоту  $\omega$  МГД хвиль знайдемо з розв'язання дисперсійного рівняння (2.39) у вигляді

$$\omega = \omega_0 \pm \delta\omega, \quad (2.42)$$

де  $\omega_0$  – розв'язок дисперсійного рівняння в нульовому наближенні,  $D^{(0)}(\omega_0) = 0$ . Цей розв'язок можна отримати числовими методами або (у спеціальних випадках) аналітично. Наприклад, для вищих радіальних мод ШМЗ хвиль у плазмовому циліндрі з неоднорідним радіальним профілем густини дисперсійне рівняння  $D^{(0)}(\omega_0) = 0$  отримане у вигляді умови квантування (див., наприклад, [196]), з якого здобуто наочні аналітичні вирази для частот ШМЗ хвиль. Будемо далі вважати величину частоти  $\omega_0(k_z, m)$  відомою.

Поправка  $\delta\omega$  до власної частоти, обумовлена гофруванням зовнішнього магнітного поля, дорівнює

$$\delta\omega = D^{(1)} \left( \frac{\partial D^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (2.43)$$

У випадку, коли вигляд залежності  $D^{(0)}(\omega)$  аналітично не задано, наприклад, коли розподіл полів  $\psi_{l,3}^{(0)}$  і  $\tilde{\psi}_{l,3}^{(0)}$  знаходиться в числовий спосіб, похідна  $(\partial D^{(0)}/\partial \omega)$ , що входить до (2.43), може бути обчислена [32] за теорією збурень,

$$\left(\frac{\partial D^{(0)}}{\partial \omega}\right) = \frac{c}{i\omega\epsilon_{\perp}} \left( -\frac{m}{r} \epsilon_2^{(0)} \tilde{\psi}_1^{(0)}(b) \int_0^b \frac{\psi_1^{(0)} \hat{\Omega} \psi_1^{(0)}}{W_1} dr + \frac{m}{r} \psi_1^{(0)} \frac{\partial \epsilon_2^{(0)}}{\partial \omega} + \right. \\ \left. + \frac{\partial(\epsilon_1^{(0)} - N_z^2)}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_1^{(0)}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{\psi}_1^{(0)}}{\partial r} \int_0^b \frac{\psi_1^{(0)} \hat{\Omega} \psi_1^{(0)}}{W_1} dr (\epsilon_1^{(0)} - N_z^2) \right) \Big|_{r=b, \omega=\omega_0}. \quad (2.44)$$

Оператор  $\hat{\Omega}$ , що входить до (2.44), визначено співвідношенням (1.58) у підрозділі 1.1.

Скористаємося отриманими результатами для дослідження впливу гофрування на частоту аксіально симетричних ( $m=0$ ) МГДХ, що поширюються в плазмі з однорідним профілем густини. У цьому випадку розподіл амплітуд основних гармонік визначається в явному вигляді,  $\psi_1^{(0)} = J_0(k_l r)$ , де  $J_m(x)$  - функція Бесселя порядку  $m$ .

Для АХ, що поширюється майже уздовж магнітного поля ( $k_A^2 \ll \kappa_l^2$ , тут  $\kappa_j^2 = (j k_z)^2 - (\omega/c)^2$ ), частота  $\omega_0$  є близькою до іонної циклотронної частоти,

$$\omega_0 = \omega_{ci}^{(0)} \left( 1 - \frac{k_A^2}{\kappa_l^2} \right), \quad (2.45)$$

де альфвенівське хвильове число  $k_A = \omega \omega_{pi} / (c \omega_{ci}^{(0)})$ . Величина поправки  $\delta\omega$  у цьому випадку визначається виразом

$$\delta\omega = \frac{c k_A^2 \epsilon_m(b)}{b(N_z^2 - 1) \kappa_l^2} \left( |N_z| + \frac{5 j_{1,s}^2 c^2}{\omega^2 b^2} \right), \quad (2.46)$$

де  $j_{1,s}$  - значення  $s$ -го кореня функції Бесселя першого порядку,  $J_1(j_{1,s}) = 0$ . Величина  $\delta\omega$  (2.46) у  $1/\epsilon_m \gg 1$  разів більша за порядком величини за значення для поправки  $\Delta\omega_m$ , отриманої для нерезонансного випадку в [32],

$$\frac{\Delta\omega_m}{\omega^{(0)}} = \frac{k_m k_z^2 b \epsilon_m^2(d)}{k_A^2 j_{1,s}^2} \exp[-2k_m(d-b)]. \quad (2.47)$$

Відзначимо, що в розглянутому випадку АХ є короткохвильовою в аксіальному напрямку, так що  $\kappa_l b \gg j_{1,s}$ , тому в силу резонансної умови  $2k_z = k_m$  (2.19) величина  $\epsilon_m$  швидко (майже за експонентою) зменшується при віддаленні від поверхні плазми,  $\epsilon_m(r) = \epsilon_m(b) \exp[-2|k_z|(b-r)]$ . Тому вплив гофрування стаціонарного маг-

нітного поля відчувається тільки у вузькому шарі, на відстанях  $\Delta r \leq (2k_z)^{-1}$  від магнітних котушок.

Для довгохвильової ШМЗХ, що поширюється майже перпендикулярно магнітному полю,  $k_I \approx k_A \gg |k_z|$ , частота  $\omega_0$  визначена у підрозділі 1.1. формулою (1.60). Для цих хвиль поправка до частоти, обумовлена гофруванням, дорівнює

$$\delta\omega = \frac{\pi\varepsilon(b)c\omega_{ci}Q_s}{4b(\omega_{ci}^2 - \omega^2)}\omega_0. \quad (2.48)$$

Індекс числового множника  $Q_s$ ,

$$Q_s = \int_0^{j_{1,s}} x J_0(x) J_1(x) dx, \quad (2.49)$$

- відповідає номеру кореня функції Бесселя, значення  $Q_s$  для перших десяти коренів функції Бесселя змінюється неістотно (див. Табл.2.1).

Таблиця 2.1.

$s$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q_s$	0.319	0.415	0.474	0.517	0.550	0.578	0.602	0.622	0.641	0.657

Для цих хвиль  $|k_z b| \ll 1$ , тому в силу резонансної умови  $2k_z = k_m$  (2.19) величина  $\varepsilon_m$  слабо залежить від радіуса,  $\varepsilon_m(r) \approx \varepsilon_m(b)$ . Саме цим пояснюється той факт, що розщеплення власної частоти ШМЗХ (2.48) у плазмі, що межує з гофрованою металевою камерою, виявляється істотнішим за розщеплення АХ (2.46).

Дослідимо тепер вплив гофрування на дисперсійні властивості МГД хвиль у плазмовому шнурі, який відокремлено від круглої циліндричної камери вакуумним прошарком. Вважаємо для визначеності, що гранична магнітна поверхня описується рівнянням

$$r = a(1 + \varepsilon_a \cos(2k_z z)), \quad (2.50)$$

де відповідно до визначення (2.4)

$$\varepsilon_a = \frac{-1}{a^2} \int_0^a r \varepsilon_m dr. \quad (2.51)$$

Залежність аксіального компонента магнітного поля МГДХ у вакуумі, що задовольняє крайовій умові на металевій камері, має вигляд

$$B=[P_0^{(+)} q_1(r) \exp(ik_z z) + P_0^{(-)} q_1(r) \exp(-ik_z z) + P_1^{(+)} q_3(r) \exp(3ik_z z) + P_1^{(-)} q_3(r) \exp(-3ik_z z)] \exp[i(m\vartheta - \omega t)], \quad (2.52)$$

де

$$q_j(r) \equiv K'_m(\kappa_j b) I_m(\kappa_j r) - I'_m(\kappa_j b) K_m(\kappa_j r), \quad (2.53)$$

$I_m(x)$  - модифікована функція Бесселя і  $K_m(x)$  - функція Макдональда порядку  $m$ .

Наклавши крайові умови на граничній магнітній поверхні (2.50), одержимо дисперсійне рівняння у вигляді (2.39), у якому

$$D^{(0)} = \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1, \quad (2.54)$$

$$D^{(1)} = \alpha_1 \delta_2 - \beta_1 \gamma_2 + \alpha_2 \delta_1 - \beta_2 \gamma_1, \quad (2.55)$$

$$\alpha_1 = v(a), \quad \beta_1 = \frac{-\omega}{c \kappa_1^2} \frac{\partial g_1}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad (2.56)$$

$$\alpha_2 = \left\{ \frac{-\omega^2}{c^2 k_1^2} \left[ \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{2} v - \left( \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} + \frac{c^2 m \varepsilon'}{4 r \omega^2} \right) u \right] - \frac{\omega^2 \mu_1}{c^2 k_1^2} \left[ \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{2} u + \left( \frac{c^2 m \varepsilon'}{4 r \omega^2} - \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{2} \right) v - \frac{c^2}{4 \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon' u) - \frac{c^2 \varepsilon'}{4 r \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (r u) \right] + \frac{a \varepsilon_a}{2} \frac{\partial v}{\partial r} \right\} \Big|_{r=a}, \quad (2.57)$$

$$\gamma_1 = \psi_1^{(0)}(a), \quad \beta_2 = \frac{-\omega}{c \kappa_1^2} \frac{a \varepsilon_a}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial r^2} \Big|_{r=a}. \quad (2.58)$$

Дослідимо на основі формул (2.43) і (2.54) - (2.58) розщеплення спектрів аксіально несиметричних ( $m < 0$ ) МГД коливань тонкого ( $\kappa_1 a \ll 1$ ,  $k_1 a \ll 1$ ) плазмового шнура з радіально однорідною густиною, відокремленого від круглої металеві камери вузьким ( $|m|(b-a) \ll a$ ) вакуумним шаром. При цьому в силу резонансної умови (2.19) будемо вважати параметр гофрування незалежним від радіуса ( $\varepsilon_m(r) = \varepsilon(b)$ ).

Для АХ, що поширюються майже паралельно магнітному полю,  $k_A^2 \ll \kappa_1^2$ , частота  $\omega_0$  є близькою до іонної циклотронної частоти  $\omega_{ci}^{(0)}$ :

$$\omega_0 = \omega_{ci}^{(0)} \left( 1 - \frac{|m|(b-a)}{a} \frac{k_A^2}{\kappa_1^2} \right). \quad (2.59)$$

Поправка  $\delta\omega$  до власної частоти таких АХ дорівнює

$$\delta\omega = \varepsilon(b) \omega_{ci}^{(0)} \left( \frac{\kappa_l^2}{k_l^2} - \frac{cak_l^2}{4\omega_0(2|m|+1)} \right). \quad (2.60)$$

Величина розщеплення (2.60) частоти АХ є більшою, ніж у випадку великого плазмового циліндра (2.46), у якому гофрування істотне тільки в малій частині плазмового об'єму.

Для ШМЗХ, що поширюються майже перпендикулярно магнітному полю,  $k_A^2 \gg \kappa_l^2$ , частота дорівнює

$$\omega_0 = \kappa_l v_A \sqrt{\frac{a}{|m|(b-a)}} \ll \omega_{ci}^{(0)}. \quad (2.61)$$

Вираз для поправки, обумовленої гофруванням магнітного поля, має для таких ШМЗХ наступний вигляд:

$$\delta\omega = \frac{-\varepsilon(b)a}{4(b-a)} \left[ 1 + \frac{\kappa_l a}{2|m|+1} \sqrt{\frac{b-a}{|m|a}} \frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}^{(0)}} \right] \omega_0. \quad (2.62)$$

Розщеплення частоти ШМЗХ (2.62) також є сильнішим, ніж у випадку великого плазмового циліндра (2.48). Це пояснюється тим, що у великому плазмовому циліндрі вздовж радіусу укладається багато довжин хвиль, а у випадку тонкого плазмового циліндра для існування ШМЗХ принциповою є наявність вакуумного прошарку, і відмінність форми граничної магнітної поверхні від круглого циліндра помітно впливає на дисперсійні властивості ШМЗХ у цьому випадку.

Якщо плазмовий шнур відділений від металевої камери широким ( $\kappa_l b \gg 1$ ) вакуумним прошарком, то поправка (2.43) до частоти МГДХ стає експоненціально малою. Наприклад, частота АХ у випадку тонкого ( $\kappa_l a \ll 1$ ,  $k_l a \ll 1$ ) плазмового циліндра є близькою до іонної циклотронної частоти  $\omega_{ci}^{(0)}$ ,

$$\omega_0 = \omega_{ci}^{(0)} (1 - k_A^2 / (2\kappa_l^2)). \quad (2.63)$$

Обумовлена гофруванням магнітного поля поправка до частоти АХ дорівнює в цьому випадку

$$\delta\omega = -\varepsilon(b) \exp(-2|k_z|(b-a)) \frac{\omega_{ci}^{(0)} a}{2|m|+1} \frac{\kappa_l^2}{k_A^2 c} \omega_0. \quad (2.64)$$

Частота ШМЗХ, для якої  $k_A^2 \gg \kappa_l^2 \gg b^{-2}$ , дорівнює в цьому випадку

$$\omega_0 = (v_A/a)(j_{m,k} + \kappa_1/k_A). \quad (2.65)$$

Поправка до частоти таких ШМЗХ, обумовлена гофруванням, визначається наступним простим виразом:

$$\delta\omega = -0.5\varepsilon(b)\exp(-2|k_z|(b-a))\omega_0. \quad (2.66)$$

Підіб'ємо підсумки. В цьому підрозділі проведено дослідження впливу гофрування зовнішнього магнітного поля на власні моди і власні частоти МГДХ у резонансному випадку, коли аксіальна довжина хвилі в два рази більша за аксіальний період гофрування. З проведеного розгляду можна зробити наступні висновки.

Показано, що в резонансному випадку гофрування призводить до розщеплення власних частот МГД хвиль,  $\omega = \omega_0 \pm \delta\omega$ , причому поправки  $\delta\omega$  до частот виявляються величинами першого порядку малості за параметром гофрування,  $\delta\omega \sim \varepsilon_m \omega_0$ , на відміну від нерезонансного випадку, коли вони є величинами другого порядку малості за цим параметром.

Показано, що власними модами в резонансному випадку є стоячі хвилі. З цієї причини варто очікувати падіння ефективності підтримання струмів захоплення МГД хвилями з резонансним значенням хвильового числа в умовах резонансного збудження таких хвиль сторонніми джерелами.

Пучності (вузли) стоячої хвилі з більшою частотою  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  (з меншою частотою  $\omega = \omega_0 - \delta\omega$ ) розташовані там, де напруженість утримуючого магнітного поля є максимальною. Це пояснюється тим, що власна частота АХ і ШМЗХ у прямому магнітному полі тим більша, чим сильніше  $|\vec{B}_0|$ .

Внаслідок додавання двох власних стоячих хвиль із близькими частотами  $\omega = \omega_0 \pm \delta\omega$  утворюються биття. Частота цих биттів  $\delta\omega$  залежить як від зовнішніх параметрів ( $\varepsilon(b), \omega_{ci}^{(0)}, L, a, b$ ), так і від густини  $n$  плазми ( $k_A^2 \propto n$ ). Тому вимірювання частоти биттів з аксіальною довжиною хвилі  $2L$  може бути використане для діагностики густини плазми.

Досліджений тут ефект розщеплення частоти МГД хвиль гофрованим магнітним полем можна спостерігати експериментально. Аналогічний ефект зняття



виродження щодо знака аксіального хвильового числа спектрів МГД коливань у токамаках, викликаного поздовжнім електричним струмом, був експериментально виявлений (див., напр., [183]). Щоб розділити зазначені ефекти, слід врахувати, що поздовжній струм знімає виродження спектрів МГД коливань з довільним аксіальним хвильовим числом, а гофрування призводить до розщеплення частоти лише для хвиль з резонансним значенням аксіального хвильового числа. Крім того, для аксіально симетричних ( $m=0$ ) ШМЗ хвиль у плазмі з однорідним профілем температури і густини розщеплення спектрів, обумовлене азимутальним магнітним полем, є [189] ефектом більш високого, ніж  $(B_{0g}/B_0)^2$ , порядку малості. Розщеплення спектрів МГД хвиль з аксіальним періодом  $2L$ , обумовлене гофруванням магнітного поля, відбувається, як показано в цьому підрозділі, і для аксіально симетричних хвиль. Зсув  $\delta\omega_l$  частоти ШМЗ хвиль у великому плазмовому циліндрі, обумовлений наявністю  $B_{0g}$ , має різний знак для хвиль з різними знаками аксіального хвильового числа і є [189] величиною порядку

$$\delta\omega_l \sim \frac{2\omega_0^3 k_z m}{\omega_{ci}^{(0)2} k_A^2 a} \frac{B_{0g}(a)}{B_0}. \quad (2.67)$$

З порівняння виразів (2.48) і (2.67) робимо висновок, що ефектом розщеплення частоти подовжнім струмом можна знехтувати для хвиль з резонансним значенням аксіального хвильового числа в порівнянні з розщепленням частоти гофрованим магнітним полем, якщо

$$\frac{B_{0g}}{B_0} \ll \frac{\varepsilon_m N_A^2}{4mN_z}. \quad (2.68)$$

Ця умова (2.68) може виконуватися за реальних експериментальних умов.

Відзначимо також, що в неоднорідній плазмі токамаків сателітні АР (2.25), у яких відбувається конверсія обох сателітних гармонік МГД хвилі, пропорційних  $\exp(\pm 3ik_z z)$ , у дрібномасштабні кінетичні хвилі, розташовані в глибині плазми, де густина у 9 разів вища, ніж в основному альфвенівському резонансі (2.24). Це дає підстави [147] передбачити істотне додаткове нагрівання плазми токамаків поблизу сателітних АР (2.25) МГД хвилями, основна гармоніка яких ( $\propto \exp(\pm ik_z z)$ ) хара-

ктеризується довжиною хвилі  $2L$ .

Отримані в цьому підрозділі результати можуть бути корисними також і для вивчення дисперсійних властивостей МГД хвиль з аксіальним хвильовим числом  $2\pi/L$ , яке удвічі перевищує резонансне значення (2.19). При дослідженні нерезонансного впливу гофрування на властивості таких хвиль у роботі [32] у повному виразі для утримуючого магнітного поля

$$B_{0z}=B_0\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j(r)\cdot\cos(jk_0z+\varphi_j)\right], \quad (2.69)$$

залишено лише перший доданок, оскільки параметр гофрування  $\varepsilon_j$ , як правило, швидко зменшується при збільшенні номера  $j$  (величини  $\varphi_j$  у (2.69) є константами). Урахування, поряд з основним доданком з  $j=1$ , резонансного доданка з  $j=2$  призведе в цьому випадку до поправки  $\delta\omega \propto \varepsilon_{j=2}$ , величина якої визначається виразом (2.43), у той час, як основний доданок (нерезонансний) дає поправку до власної частоти  $\delta\omega \propto \varepsilon_{j=2}^2$ . Таким чином, числові значення обох цих поправок можуть виявитися близькими величинами.

## 2.2. Додаткове нагрівання плазми поблизу сателітних альфвенівських резонансів в уловлювачах з гофрованим магнітним полем

У цьому підрозділі досліджено можливість поглинання ВЧ потужності поблизу сателітних АР, в яких відбувається різке зростання амплітуди сателітної гармоніки електромагнітних хвиль і їх конверсія в дрібномасштабні хвилі [147, 160, 197, 198]. В гофрованому зовнішньому магнітному полі (2.1) МГДХ поширюються у вигляді пакета. Зокрема, для аксіальної компоненти магнітного поля МГДХ виберемо наступний вигляд для цього пакету:

$$B_z=[B^{(0)}(r)+B^{(+)}(r)\exp(ik_mz)+B^{(-)}(r)\exp(-ik_mz)]\exp[i(k_zz+m\vartheta-\omega t)], \quad (2.70)$$

де поряд із основною гармонікою  $\propto\exp[i(k_zz)]$  враховано дві найближчі сателітні гармоніки  $\propto\exp[i(k_z\pm k_m)z]$ , чії амплітуди вважаємо малими величинами,  $|B^{(\pm)}|\sim\varepsilon_m|B^{(0)}|$  згідно з результатами, здобутими в роботі [32],  $m$  - азимутальний номер

моди,  $k_z$  - аксіальне хвильове число МГДХ у нульовому наближенні (у випадку вимушених коливань величина  $k_z$  визначається антеною). Для даного дослідження нам будуть потрібні вирази (2.8) – (2.10) для компонентів тензора діелектричної проникності  $\varepsilon_{l,2}$  з точністю до членів першого порядку малості за  $\varepsilon_m$ .

У цьому підрозділі показано, що поряд з основним АР  $r = r_A^{(0)}$ , у якому виконується умова (2.24), в уловлювачах з гофрованим магнітним полем у випадку слабого гофрування ( $|\varepsilon_m| \ll 1$ ) можуть існувати два додаткових резонанси  $r = r_A^{(\pm)}$ , у яких

$$\varepsilon_l^{(0)}(r) = (N_z \pm N_b)^2. \quad (2.71)$$

Тут  $N_z = ck_z/\omega$  - поздовжній показник заломлення,  $N_b \equiv ck_m/\omega$ . Ці резонанси природно назвати сателітними альфвенівськими резонансами (САР). Незважаючи на те, що ВЧ потужність, що поглинається поблизу САР, а також декремент обумовленого цим поглинанням загасання МГДХ є величинами другого порядку малості за параметром  $\varepsilon_m$ , можливі ситуації, коли досліджений ефект може бути істотним для нагрівання плазми.

За відсутності гофрування радіальна залежність аксіального компонента магнітного поля МГДХ  $B_z^{(0)}(r)$  визначається рівнянням (2.20), яке наведено в підрозділі 2.1, з індексом  $j=1$ . Обмежений при  $r=0$  розв'язок рівняння (2.20)  $B^{(0)}(r) = \Psi(r)$  вважається відомим. (Розподіл ВЧ полів ШМЗ хвиль у плазмовому циліндрі з радіально - неоднорідним профілем густини можна отримати числовими методами, див. [1, 13, 175] і ін.) Якщо густина плазми є невеликою, то АР (2.24) відсутній. У цьому випадку функція  $\Psi(r)$  обмежена і дійсна на всьому інтервалі зміни координати  $r$  від 0 до  $b$ , де  $b$  - радіус металевої камери, в якій знаходиться плазмовий циліндр. Вибираємо в цьому випадку нормувальний множник так, щоб  $\Psi(r)$  була дійсною.

Якщо ж у плазмовому циліндрі є область АР (2.24), то поблизу точки  $r_A^{(0)}$  поле  $B^{(0)}(r)$  підростає, і відбувається конверсія МГДХ у дрібномасштабні кінетичні хвилі [2, 53, 186, 187]. У цьому випадку вибором нормувального множника можна досягти відсутності уявної частини  $\Psi(r)$  або тільки при  $r < r_A^{(0)}$ , або тільки при

$r > r_A^{(0)}$ . На інтервалі, що залишився,  $\Psi(r)$  містить уявний доданок, обумовлений ефектом конверсії поблизу  $r_A^{(0)}$ . У загальному випадку ця уявна частина одного порядку величини з реальною частиною. При цьому наявність сателітних резонансів призводить лише до виникнення малого доданка до величини потужності, що поглинається плазмою. Виключенням є лише випадок, коли ширина області непрозорості на периферії плазми для основної гармоніки є великою, і поле поблизу точки АР (2.24) є експоненціально малим в порівнянні з полем, створюваним антеною на краю плазми. При цьому в області  $r = r_A^{(0)}$  мала не лише уявна, але і реальна частина  $B^{(0)}(r)$ . Тому далі будемо розглядати саме той випадок, коли уявна частина  $\Psi(r)$  є малою, і при обчисленні полів  $B^{(\pm)}$  будемо вважати  $\Psi(r)$  дійсною.

Представлення інших компонентів магнітних і електричних полів МГДХ у вигляді ряду є аналогічним до (2.70).

Нагадаємо, що радіальна  $E_r^{(0)}(r)$  і азимутальна  $E_\theta^{(0)}(r)$  компоненти електричного поля МГДХ у нульовому наближенні визначаються виразами (1.28), наведеними в підрозділі 1.1.

Використання крайової умови на поверхні металевої камери дозволяє здобути дисперсійне рівняння МГДХ

$$D^{(0)} = 0, \quad (2.72)$$

де  $D^{(0)} = E_\theta^{(0)}(b)$ . Частоту  $\omega^{(0)}$  МГД коливань плазмового циліндра за відсутності гофрування, яка є розв'язком (2.72), вважаємо відомою. Для вищих радіальних мод ШМЗХ рівняння (2.72) має вигляд правила квантування (див. напр., [196]).

Амплітуди  $B^{(\pm)}$  сателітних гармонік, які є величинами першого порядку за малим параметром гофрування порівняно до  $B^{(0)}$ , мають бути обмежені на осі циліндра. Знайдемо їх за умов нехтування зіткненнями між частинками плазми, інерцією електронів і ефектом скінченності ларморовського радіуса іонів за допомогою теорії збурень,

$$B^{(\pm)} = \psi_\pm \int_{r_A^{(0)}}^r \tilde{\psi}_\pm \frac{\hat{G}_\pm^{(1)} B^{(0)} dr}{W(\psi_\pm, \tilde{\psi}_\pm)} - \tilde{\psi}_\pm \int_0^r \psi_\pm \frac{\hat{G}_\pm^{(1)}}{W(\psi_\pm, \tilde{\psi}_\pm)} + C_\pm \psi_\pm. \quad (2.73)$$

Тут  $\psi_\pm$  і  $\tilde{\psi}_\pm$  - розв'язки (2.20), що відповідають хвилі з аксіальним хвильовим чис-

лом  $k_z \pm k_m$  і поперечним хвильовим числом  $k_{\pm} = k_{\perp}(k_z \pm k_m, r)$  (1.29): один,  $\psi_{\pm}$ , є обмеженим, інший,  $\tilde{\psi}_{\pm}$ , має особливість при  $r=0$ ;  $C_{\pm}$  - постійні інтегрування,  $W$ - вронскіан функцій  $\psi_{\pm}$  і  $\tilde{\psi}_{\pm}$ :

$$W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm}) \equiv \psi_{\pm} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\pm}}{\partial r} - \tilde{\psi}_{\pm} \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial r} \propto \frac{k_{\pm}^2}{r}. \quad (2.74)$$

Оператор  $\hat{G}_{\pm}^{(1)}$ , що входить до виразу (2.73), визначається наступною формулою:

$$\hat{G}_{\pm}^{(1)} B^{(0)} = \frac{m}{r} k_{\perp\pm}^2 (A_l^{(\pm)} + \mu_{\pm} A_2^{(\pm)}) - \frac{k_{\perp\pm}^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu_{\pm} A_l^{(\pm)} + A_2^{(\pm)})], \quad (2.75)$$

де

$$A_l^{(\pm)} = -\frac{I}{2k_{\perp\pm}^2} \left[ \frac{\omega}{c} \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(0)} + i \frac{\omega}{c} \varepsilon_2^{(1)} E_g^{(0)} - (N_m \pm N_z) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varepsilon'_m}{k_m} E_r^{(0)} \right) \right. \\ \left. \mp \frac{\varepsilon'_m N_z}{rk_m} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r^{(0)}) \mp i \frac{m \varepsilon'_m}{rk_m} N_z E_g^{(0)} \right], \quad (2.76)$$

$$A_2^{(\pm)} = \frac{I}{2k_{\perp\pm}^2} \left[ (N_m \pm N_z) \frac{m \varepsilon'_m}{rk_m} E_r^{(0)} + \frac{\omega}{c} \varepsilon_2^{(1)} E_r^{(0)} + i \frac{\omega}{c} \varepsilon_l^{(1)} E_g^{(0)} \right], \quad (2.77)$$

частка  $\mu_{\pm} \equiv \mu(k_z \pm k_m, r)$  визначена формулою (1.29) в підрозділі 1.1.

Амплітуди сателітних гармонік радіальної  $E_r^{(\pm)}$  й азимутальної  $E_g^{(\pm)}$  компонент електричного поля МГДХ мають наступний вигляд:

$$E_r^{(\pm)} = \frac{\omega}{c} A_l^{(\pm)} + \mu_{\pm} \frac{\omega}{c} A_2^{(\pm)} - \frac{\omega m}{cr k_{\perp\pm}^2} B^{(\pm)} - \frac{\omega \mu_{\pm}}{c k_{\perp\pm}^2} \frac{\partial B^{(\pm)}}{\partial r}, \quad (2.78)$$

$$E_g^{(\pm)} = i \frac{\omega}{c} \left[ A_2^{(\pm)} + \mu_{\pm} A_l^{(\pm)} - \frac{m \mu_{\pm}}{r k_{\perp\pm}^2} B^{(\pm)} - \frac{1}{k_{\perp\pm}^2} \frac{\partial B^{(\pm)}}{\partial r} \right] \quad (2.79)$$

Поблизу САР відбуваються зростання амплітуд сателітних гармонік електричних і магнітних полів МГДХ і конверсія цих коливань у дрібномасштабні плазмові хвилі. Зазначений ефект має місце як для альфвенівських хвиль з  $\omega < \omega_{ci}$  (коли  $(N_z \pm N_b)^2 > 1$ ), так і для ШМЗХ із  $\omega > \omega_{ci}$ ; (коли  $(N_z \pm N_b)^2 < 1$ ) - у розрідженій плазмі.

Будемо вважати область конверсії вузькою в порівнянні з відстанню від то-

чки резонансу до осі циліндра  $r_A^{(\pm)}$  і до металеві камери  $[b-r_A^{(\pm)}]$ . Оскільки поблизу точок САР величини  $\mu_{\pm}$  і  $k_{\pm}^2$  мають, згідно визначень (1.29) і (2.71), особливість:  $\mu_{\pm}, k_{\pm}^2 \propto [\varepsilon_l^{(0)} - (N_z \pm N_b)^2]^{-1}$ , то і поправки  $B^{(\pm)}$  (2.73) мають особливість вигляду  $B^{(\pm)} \propto \ln|\varepsilon_l^{(0)} - (N_z \pm N_b)^2|$ , тому вирази (2.73) виявляються справедливими тільки для  $0 < r < r_A^{(\pm)}$ . Удалині від точки САР при  $r_A^{(\pm)} < r < b$  скористаємося для  $B^{(\pm)}$  виразами

$$B^{(\pm)} = \psi_{\pm} \int_{r_A^{(\pm)}+x}^r \tilde{\psi}_{\pm} \frac{\hat{G}_{\pm}^{(1)} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} - \tilde{\psi}_{\pm} \int_{r_A^{(\pm)}+x}^r \psi_{\pm} \frac{\hat{G}_{\pm}^{(1)} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} + K_{\pm} \psi_{\pm} + \tilde{K}_{\pm} \tilde{\psi}_{\pm}. \quad (2.80)$$

Постійні інтегрування  $\tilde{K}_{\pm}$  визначаємо з граничних умов на металевій поверхні камери,  $E_g^{(\pm)}(b) = 0$ :

$$K \square_{\pm} = \{-0.5 \mu_{\pm} [(\omega/c) \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(0)} - (N_b \pm N_z) d(\varepsilon' E_r^{(0)})/d(k_b r) \mp \frac{\varepsilon' N_z}{r k_b} \frac{d(r E_r^{(0)})}{dr}] + \frac{1}{2} \left[ (N_b \pm N_z) \frac{m \varepsilon'}{r k_b} + \frac{\omega}{c} \varepsilon_2^{(1)} \right] E_r^{(0)} - \frac{m \mu_{\pm}}{r} K_{\pm} \psi_{\pm} - K_{\pm} \psi'_{\pm} \} \left\{ \frac{m \mu_{\pm}}{r} \tilde{\psi}_{\pm} + \psi_{\pm} \right\}^{-1} \Big|_{r=b, \omega=\omega^{(0)}}. \quad (2.81)$$

Поблизу точок САР (2.71) амплітуди сателітних гармонік  $B^{(\pm)}$  описують спільне поширення МГДХ і дрібномасштабних хвиль і визначаються з урахуванням інерції електронів, ефекту скінченності ларморівського радіуса і зіткнень між частинками плазми з наступного рівняння:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{k_{\pm}^2 (\varepsilon_l^{(0)} - (N_z \pm N_b)^2)} \left[ \varepsilon_l^{(0)} - (N_z \pm N_b)^2 + i \varepsilon_l^{(c)} + \left( \varepsilon_T + \frac{(N_z \pm N_b)^2}{\varepsilon_3} \right) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \frac{\partial B^{\pm}}{\partial r} + q(k_z \pm k_b, r) B^{(\pm)} + \hat{G}^{(\pm)} B^{(0)} = 0. \quad (2.82)$$

Тут доданок  $\varepsilon_l^{(c)}$ , який враховує зіткнення частинок [184], наведений у підрозділі 1.3 у формулі (1.124). Величина  $\varepsilon_T$  у (2.82) враховує скінченність ларморівського радіуса іонів [185], вона наведена у підрозділі 1.3 у формулі (1.126). Інерція електронів врахована в (2.82) у компоненті тензора діелектричної проникності  $\varepsilon_3$ , вигляд якої наведений у підрозділі 1.3 у формулах (1.127) – (1.130).

При розв'язанні рівняння (2.82) скористаємося тією обставиною, що поблизу точок САР (2.71) амплітуда  $B^{(\pm)}(r)$  змінюється повільніше, ніж її похідна  $F_{\pm}(r) = -(c/\omega) \partial B^{(\pm)}/\partial r$  (ця обставина зазвичай використовується при дослідженні АР [53, 186, 187]). Це дозволяє внаслідок інтегрування за координатою  $r$  одержати з (2.82) для  $F_{\pm}(r)$  неоднорідне рівняння Ейрі,

$$\left[ \varepsilon_l^{(0)} - (N_z \pm N_b)^2 + i\varepsilon_l^{(1)} + \left( \varepsilon_T \frac{(N_z \pm N_b)^2}{\varepsilon_3} \right) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] F_{\pm}(r) = [(\varepsilon_l^{(0)} - (N_z \pm N_b)^2)^2 - \varepsilon_2^{(0)2}] \times \left[ C_l + \int_{r_A^{(\pm)}-x}^r r (qB^{(\pm)} + \hat{G}^{(\pm)} B^{(0)}) dr \right] \frac{\omega}{cr}. \quad (2.83)$$

Відстань  $x$ , яка входить до розв'язка (2.83), має бути малою в порівнянні з  $r_A^{(\pm)}$  і характерною для  $B^{(\pm)}$  (2.73) радіальною довжиною хвилі. Водночас  $x$  має бути досить великою, щоб для визначення значення  $B^{(\pm)}(r^{(\pm)} - x)$  можна було скористатися виразом (2.73). Вважаємо зміну параметрів плазми поблизу точки САР слабкою, тому при розв'язанні рівняння (2.83) скористаємося значенням його правої частини і величин  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon_3$  і  $\varepsilon_l^{(c)}$  у точці  $r=r_A^{(\pm)}$ . Вираз для  $B^{(\pm)}$ , який асимптотично зшивається з (2.73) і є справедливим поблизу  $r=r_A^{(\pm)}$ , одержимо з (2.83) у вигляді

$$B^{(\pm)} = B^{(\pm)}(r^{(\pm)} - x) - \frac{\omega}{c} \int_{r_A^{(\pm)}-x}^r F_{\pm}(r) dr, \quad (2.84)$$

де

$$F_{\pm}(r) = iF_l^{(\pm)} \varepsilon_2^{(0)2} k_l \left( \frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \right)^{-1} \Big|_{r_A^{(\pm)}} u_0(\xi), \quad (2.85)$$

$$u_0 = \text{sgn}[(\omega - \omega_{ci}) \text{Re}(k_l)] \int_0^{\infty} \exp \left[ i \text{sgn} \left( \frac{d\varepsilon_l^{(0)}}{dr} \text{Re}(k_l) \right) \left( \xi t + \frac{t^3}{3} \right) \right] dr, \quad (2.86)$$

$$F_1^{(\pm)} = \left[ C_1 + \int_{r_A^{(\pm)}-x}^{r_A^{(\pm)}} r (qB^{(\pm)} + \hat{G}^{(\pm)} B^{(0)}) dr \right] \frac{\omega}{cr_A^{(\pm)}} = \left\{ \frac{-I}{2\varepsilon_2^{(0)}} \left[ \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(0)} + i\varepsilon_2^{(1)} E_9^{(0)} - \frac{c}{\omega} (N_b \pm N_z) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varepsilon_m'}{k_b} E_r^{(0)} \right) \right] \right\}$$

$$\mp \frac{\varepsilon'_m c N_z}{k_b \omega r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r^{(0)}) \mp \frac{i m \varepsilon'_m c}{r k_b \omega} N_z E_g^{(0)} \left] - \frac{c m}{r \varepsilon_2^{(0)} \omega} B^{(\pm)} - i E_g^{(\pm)} \right\} \Big|_{r_A^{(\pm)}}, \quad (2.87)$$

$$\xi = k_1 (r - r_A^{(\pm)}) - i \eta, \quad \eta = -k_1 \varepsilon_1^{(c)} \left( \frac{\partial \varepsilon_1^{(0)}}{\partial r} \right)^{-1} \Big|_{r_A^{(\pm)}},$$

$$k_l = \left( -\frac{\omega^2 \partial \varepsilon_l^{(0)}}{c^2 \partial r} \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_T \varepsilon_3 + \varepsilon_l^{(0)}} \right)^{1/3} \Big|_{r_A^{(\pm)}} = |k_l| \exp(i \psi). \quad (2.88)$$

У випадку вимушених МГД коливань просторовий розподіл поля  $B^{(0)}(r)$ , а отже, і величина  $F_l^{(\pm)}$  (2.87) задаються струмом в антені. Особливо відзначимо, що, хоча залежність  $B^{(\pm)}(r)$  у вигляді (2.73), (2.80) і має особливість у точці  $r_A^{(\pm)}$ , комбінація  $\left[ \frac{c m}{r \varepsilon_2^{(0)} \omega} B^{(\pm)} + i E_g^{(\pm)} \right]$ , що входить до (2.87), повільно змінюється поблизу  $r_A^{(\pm)}$ , (можна порівняти з [53, 186, 187]).

З огляду на асимптотику розв'язка рівняння (2.83) при  $Re \xi \rightarrow -\infty$ ,

$$u_0(\xi) \approx \frac{i}{\xi} + \left( \frac{\pi^2}{-\xi} \right)^{1/4} \exp \left[ i \left( \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sgn} \left( \left( -\frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \right) \Big|_{r_A^{(\pm)}} Re k_l \right) \right], \quad (2.89)$$

будемо вважати, що при віддаленні від точки САР дрібномасштабна кінетична хвиля (другий доданок у (2.89)) сильно загасає поблизу точки резонансу за рахунок зіткнень або за рахунок механізму Ландау. Якщо загасання слабе, то асимптотику (2.89) слід зшити з розв'язком рівняння (2.83), одержаним методом ВКБ і таким, що відповідає хвилям, що несуть енергію від точки конверсії в глибину плазми чи до її периферії. В такому випадку припускається, що відбитої хвилі не існує, тобто, що ці дрібномасштабні хвилі повністю поглинаються на одному проході вздовж радіуса плазмового шнура. Тим самим в цьому підрозділі не досліджено різні ефекти, що можуть виявитися при слабкому загасанні, і утворення в цьому випадку глобальних резонансів з високим значенням радіального номера.

Умова сильного загасання дрібномасштабної кінетичної хвилі дозволяє провести асимптотичну зшивку виразів (2.73), (2.80) і (2.84) для  $B^{(\pm)}(r)$ . Визначені в такий спосіб постійні інтегрування  $K^{(\pm)}$  і  $C^{(\pm)}$  дорівнюють



$$K_{\pm} = \frac{m\mu_{\pm}\tilde{\psi}_{\pm} + r\tilde{\psi}'_{\pm}}{m\mu_{\pm}\psi_{\pm} + r\psi'_{\pm}} \Big|_{r=b} \times \left[ \tilde{K}_{\pm} + \int_0^b \psi_{\pm} \frac{\hat{G}_{\pm}^{(l)} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} + i\pi \frac{\psi'_{\pm}}{W_{\pm}} \frac{\omega}{c} \varepsilon_2^{(0)^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \right)^{-1} \Big|_{r_A^{(\pm)}} F_l^{(\pm)} \right], \quad (2.90)$$

$$C_{\pm} = \frac{m\mu_{\pm}\tilde{\psi}_{\pm} + r\tilde{\psi}'_{\pm}}{m\mu_{\pm}\psi_{\pm} + r\psi'_{\pm}} \Big|_{r=b} \left[ -\tilde{K}_{\pm} - \int_0^b \psi_{\pm} \frac{\hat{G}_{\pm}^{(l)} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} \right] + i\pi \frac{\psi'_{\pm}}{W_{\pm}} \frac{\omega}{c} \varepsilon_2^{(0)^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \right)^{-1} \Big|_{r_A^{(\pm)}} F_l$$

$$\times \left( \frac{\tilde{\psi}'_{\pm}}{\psi'_{\pm}} + \frac{m\mu_{\pm}\tilde{\psi}_{\pm} + r\tilde{\psi}'_{\pm}}{m\mu_{\pm}\psi_{\pm} + r\psi'_{\pm}} \right) \Big|_{r=b} + \int_0^b \tilde{\psi}_{\pm} \frac{\hat{G}_{\pm}^{(l)} B^{(0)} dr}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})}. \quad (2.91)$$

Обчислимо величину потужності МГДХ, що поглинається поблизу точки САР на одиниці довжини плазмового циліндра,

$$P^{(\pm)} = \pi r^{(\pm)} Re \int_{r_A^{(\pm)} - x}^{r_A^{(\pm)} + x} \vec{j}^* \vec{E} dr. \quad (2.92)$$

Вона складається з роботи поля сателітних гармонік МГДХ над радіальними ВЧ струмами  $j_r \propto \exp[i(k_z \pm k_m)z + im\vartheta - i\omega t]$ ,

$$P_r^{(\pm)} = \pi r^{(\pm)} Re \int_{r_A^{(\pm)} - x}^{r_A^{(\pm)} + x} j^* E_r^{(\pm)} dr = \frac{\pi\omega}{4} \left( \left| \frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \right|^{-1} r \varepsilon_2^{(0)^2} \right)_{r=r_A^{(-)}} |F_l^{(\pm)}|^2, \quad (2.93)$$

і роботи над аксіальними ВЧ струмами,

$$P_z^{(\pm)} = \pi r_A^{(\pm)} Re \int_{r_A^{(\pm)} - x}^{r_A^{(\pm)} + x} j_z^* E_z^{(\pm)} dr = \int_{r_A^{(\pm)} - x}^{r_A^{(\pm)} + x} |k_l| \left| \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right|^2 dr$$

$$\times \left( \frac{r\omega}{4} \left| \frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \right|^{-1} \frac{\varepsilon_2^{(0)^2} Im \varepsilon_l^{(0)}}{|\varepsilon_T \varepsilon_3^2 + \varepsilon_l \varepsilon_3|} \right)_{r=r_A^{(\pm)}} |F_l^{(\pm)}|^2. \quad (2.94)$$

Відомі вирази [2, 53, 186, 187] для потужності  $P^{(0)}$ , що поглинається в основному резонансі (2.24), виходять з (2.93), (2.94), якщо в них замінити  $r_A^{(\pm)} \rightarrow r_A^{(0)}$ ,  $E_{r,z}^{(\pm)} \rightarrow E_{r,z}^{(0)}$ ,  $(N_z \pm N_b) \rightarrow N_z$ ,  $B^{(\pm)} \rightarrow B^{(0)}$  і у виразах для  $F_l^{(\pm)}$  (2.87) опустити доданки в квадратних дужках.

При обчисленні ВЧ потужності  $P^{(\pm)}$  (2.92), що поглинається, слід врахувати, що в точці  $r_A^{(\pm)}$  (2.71) поряд із сателітною гармонікою  $\propto \exp[i(k_z \pm k_b)z]$ , збуджуваною МГД хвилею з аксіальним хвильовим числом  $k_z$ , резонансно поглинається також і сателітна гармоніка  $\propto \exp[i(-k_z \mp k_b)z]$ , збуджувана МГД хвилею з аксіальним хвильовим числом  $-k_z$ .

Відзначимо, що внесок  $P_z$  у нагрівання на сателітній гармоніці не є малим, якщо  $Im \varepsilon_3 > Re \varepsilon_3$  :

$$\frac{P_z}{P_r} \sim \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_T \varepsilon_3} \right| \frac{Im \varepsilon_3}{|\varepsilon_3|}. \quad (2.95)$$

Для визначення впливу гофрування зовнішнього магнітного поля на значення власної частоти МГДХ у дисперсійному рівнянні

$$D^{(0)} + D^{(2)} = 0, \quad (2.96)$$

що уособлює рівність нулю азимутального компонента електричного поля МГДХ на металевій поверхні камери, необхідно врахувати доданки  $D^{(2)}$  другого порядку малості. Уявна частина доданка  $D^{(2)}$  визначає дійсну поправку до частоти хвилі  $\omega = \omega^{(0)} + \Delta\omega$ , залежність  $Re(\Delta\omega)$  від параметрів плазми докладно досліджено в роботі [32].

Унаслідок поглинання потужності МГДХ поблизу САР (2.71) з часом амплітуда коливань  $B^{(\pm)}$  в області САР (2.71) зростає, а амплітуда поля  $B^{(\pm)}$  в інших областях зменшується  $\propto \exp(-\gamma t)$  [199]. З (2.96) можна здобути вираз для декременту  $\gamma$  загасання МГД хвиль у вигляді

$$\gamma \equiv -Im(\Delta\omega) = -Re(D^{(2)}) \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} Im(D^{(0)}) \right]^{-1} \Big|_{\omega=\omega^{(0)}}, \quad (2.97)$$

де

$$Re(D^{(2)}) = \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\partial}{\partial r} B^{(2)} + \frac{\mu m}{r k_{\perp}^2} B^{(2)} - \mu A_3 - A_4 \right) - \left( \frac{1}{2b} \int_0^b r \varepsilon_m dr \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( Re(E_g^{(\pm)}) \right) \Big|_{r=b}, \quad (2.98)$$

якщо внутрішня поверхня металевої камери збігається з магнітною поверхнею

(2.5) з  $r_0=b$ . Якщо ж ця поверхня - прямий циліндр радіусом  $r=b$ , то останній доданок у (2.98) слід опустити. Величина  $D^{(0)}$  - уявна в силу зробленого раніше вибору функції  $\Psi(r)$  дійсною. Функція

$$B^{(2)} = \psi \int_0^r \tilde{\psi} \frac{\hat{G}^{(2)} B^{(0)} dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} - \tilde{\psi} \int_0^r \psi \frac{\hat{G}^{(2)} B^{(0)} dr}{W(\psi, \tilde{\psi})}, \quad (2.99)$$

що входить до (2.98)  $|B^{(2)}| \sim \varepsilon_m^2 |B^{(0)}|$ ,  $\tilde{\psi}(r)$  - розв'язок рівняння (2.20), що лінійно не залежить від  $\psi(r)$  і має особливість при  $r=0$ ,  $W(\psi, \tilde{\psi}) = \text{const} [k_{\perp}^2(k_z, r)/r]$ .

Оператор  $\hat{G}^{(2)}$ , що входить до (2.99), визначається співвідношенням

$$\hat{G}^{(2)} B^{(0)} = \frac{m}{r} k_{\perp}^2 (A_3 + \mu A_4) - \frac{k_{\perp}^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu A_3 + A_4)], \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} A_3 = \frac{-1}{2k_{\perp}^2} \left\{ \pm \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\varepsilon_m' N_z}{k_b} \text{Im}(E_r^{(\pm)}) \right] \right. \\ \left. \pm \frac{\varepsilon_m'}{rk_b} \frac{\partial}{\partial r} [r(N_z \pm N_b) \text{Im}(E_r^{(\pm)})] + \frac{\omega \varepsilon_l^{(1)}}{c} \text{Im}(E_r^{(\pm)}) \right. \\ \left. \pm \frac{m \varepsilon_m'}{k_b r} (N_z \pm N_b) \text{Re}(E_g^{(\pm)}) + \frac{\omega \varepsilon_2^{(1)}}{c} \text{Re}(E_g^{(\pm)}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$A_4 = \frac{1}{2k_{\perp}^2} \left\{ \frac{\omega \varepsilon_2^{(1)}}{c} \text{Im}(E_r^{(\pm)}) \mp \frac{m \varepsilon_m'}{k_m r} N_z \text{Im}(E_r^{(\pm)}) + \frac{\omega \varepsilon_l^{(1)}}{c} \text{Re}(E_g^{(\pm)}) \right\}; \quad (2.102)$$

$\text{Im}(E_r^{(\pm)})$  і  $\text{Re}(E_g^{(\pm)})$  виражаються по формулах (2.78) і (2.79) через уявну частину від  $B^{(\pm)}(r)$ , обумовлену існуванням САР,

$$\text{Im}(B^{(\pm)}) = \begin{cases} \alpha_{\pm} \psi_{\pm}(r) \text{ при } r < r_A^{\pm}, \\ \beta_{\pm} \psi_{\pm}(r) + \kappa_{\pm} \tilde{\psi}_{\pm}(r) \text{ при } b > r > r_A^{\pm}, \end{cases} \quad (2.103)$$

$$\kappa_{\pm} = \frac{\psi'_{\pm}}{W(\psi_{\pm}, \tilde{\psi}_{\pm})} \frac{\pi \omega \varepsilon_2^{(0)2}}{c} \left( \frac{\partial \varepsilon_l^{(0)}}{\partial r} \right)^{-1} \bigg|_{r=r_A^{\pm}} F_l^{(\pm)}, \quad (2.104)$$

$$\beta_{\pm} = - \frac{m \mu_{\pm} \tilde{\psi}_{\pm} + r \tilde{\psi}'_{\pm}}{m \mu_{\pm} \psi_{\pm} + r \psi'_{\pm}} \bigg|_{r=b} \kappa_{\pm}, \quad \alpha_{\pm} = \left[ 1 + \left( \frac{\tilde{\psi}'_{\pm}}{\psi'_{\pm}} \right) \bigg|_{r=r_A^{\pm}} \left( \frac{m \mu_{\pm} \psi_{\pm} + r \psi'_{\pm}}{m \mu_{\pm} \tilde{\psi}_{\pm} + r \tilde{\psi}'_{\pm}} \right) \bigg|_{r=b} \right] \beta_{\pm}. \quad (2.105)$$

Обговоримо здобуті результати. У цьому підрозділі показано, що в плазмі з радіально - неоднорідним профілем густини, яку розміщено у гофрованому магнітному полі, відбувається додаткове (у порівнянні зі звичайним АР (2.24)) поглинання енергії МГДХ в областях САР (2.71). Величина потужності, що поглинається в області додаткових резонансів, визначається виразами (2.93), (2.94), а величина декременту обумовленого цим поглинанням загасання МГДХ - виразами (2.97) і (2.98). Величина потужності (2.93), (2.94), що поглинається плазмою, пропорційна до квадрата малого параметра гофрування і зазвичай є малою в порівнянні з потужністю, що поглинається в основному АР. Однак у деяких розглянутих нижче випадках поглинання в області додаткових резонансів виявляється більш істотним, ніж при основному АР.

До цих випадків належать наступні. По – перше, якщо величина  $k_z$  є досить малою, то резонанс  $r=r_A^{(0)}$  знаходиться на периферії плазми, у той час як резонанси  $r=r_A^{(\pm)}$  можуть знаходитися при досить великих  $k_b$  у глибині плазми (див. Рис. 1.5 – 1.7). Частка  $P_r^{(\pm)}$  до  $P_r^{(0)}$  згідно (2.93) дорівнює за порядком величини

$$\frac{P_r^{(\pm)}}{P_r^{(0)}} \sim \frac{n(r_A^{(\pm)})}{n(r_A^{(0)})} \frac{(k_z \pm k_m)^2}{k_z^2} \left| \frac{F_l^{(\pm)}}{F_l^{(0)}} \right|^2. \quad (2.106)$$

Звідси видно, що  $P_r^{(\pm)}$  може бути більшим, ніж  $P_r^{(0)}$ , якщо  $k_b$  досить велике. При цьому слід врахувати, що через малість  $k_z$  поле  $B^{(0)}$  може добре проникати до пла-

зми й в області досить великої густини  $\left( \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}(\omega + \omega_{ci})} > N_z^2 \right)$  являти собою швидку

магнітозвукову хвилю. Ця ШМЗХ у гофрованому магнітному полі лінійно взаємодіє [1] з альфвенівською хвилею з аксіальним хвильовим числом  $(k_z \pm k_m)$  і за рахунок цього резонансно поглинається в точках  $r_A^{(\pm)}$ . Хвиля  $B^{(0)}$  може бути власною зі слабким загасанням для розглянутого плазмового хвильоводу (плазмового резонатора, у випадку плазмового тора - плазмового циліндра з ототожненими кінцями). У цьому випадку резонансно підростуть і сателітні гармоніки  $B^{(\pm)}$  і відповідно збільшиться потужність, що поглинається як у точці  $r_A^{(0)}$ , так і в точках  $r_A^{(\pm)}$ .

Поглинання сателітних гармонік у точках  $r_A^{(\pm)}$  також можна посилити в то-

му випадку, коли МГДХ із поздовжнім хвильовим числом  $(k_z \pm k_m)$  є власною для хвилеводу. У цьому випадку резонансно підростають два останні доданки в (2.87),

$$\text{а саме: } -\frac{cm}{\omega r \varepsilon_2^{(0)}} B^{(\pm)} - i E_g^{(\pm)} \Big|_{r=r_A^{(\pm)}}.$$

По – друге, у плазмі малої густини усюди  $N_z^2 > \varepsilon_l^{(0)}$ , і основний резонанс відсутній. У цьому випадку можлива наявність резонансу  $r=r_A^{(\pm)}$ , що забезпечить поглинання поля накачування. У цьому резонансі поглинання також можна посилити за рахунок того, що сателітна хвиля  $B^{(-)}$  буде власною модою хвилеводу.

По – третє, ШМЗ хвилі з аксіальним хвильовим числом  $|k_z| > \omega/c$  і частотою  $\omega > \omega_{ci}$  на відміну від АХ узагалі не відчувають основного резонансу (2.24). (Конверсія і резонансне поглинання ШМЗХ із  $|k_z| > \omega/c$  і частотою  $\omega > \omega_{ci}$  у периферійній плазмі досліджено в [187, 200].) Якщо ж при цьому  $|k_z - k_m| < \omega/c$ , то для таких ШМЗХ у плазмі утвориться САР (2.71). Оскільки в глибині термоядерної плазми  $\omega_{pi}^2 > \omega_{ci}^2$ , точка  $r=r_A^{(-)}$  цього САР розташована на периферії плазмового шнура. З одного боку, густина  $n(r_A^{(-)})$  і квадрат аксіального хвильового числа гармоніки  $(k_z - k_m)^2$ , що входять співмножниками до виразів (2.93) і (2.94) для ВЧ потужності, що поглинається, у цьому випадку є невеликими. Але з іншого боку, відмінність форми магнітних поверхонь від прямого циліндра найбільше помітна саме на периферії плазми (параметр гофрування  $\varepsilon_m$  зростає при збільшенні радіуса), до того ж амплітуда поля накачування також зазвичай максимальна саме поблизу поверхні плазми. Тому досліджений у цьому підрозділі САР може зробити помітний внесок до небажаного нагрівання периферії плазми термоядерного уловлювача з гофрованим магнітним полем.

### 2.3. Вплив аксіальної періодичної неоднорідності утримуючого магнітного поля на альфвенівське нагрівання циліндричної плазми поблизу основного АР

В цьому підрозділі досліджено тонку структуру локального АР і поглинання високочастотних хвиль в циліндричній плазмі у зовнішньому магнітному полі

з помірним гофруванням [168]. Утримуюче магнітне поле  $\vec{B}_0 = B_{0r}\vec{e}_r + B_{0\theta}\vec{e}_\theta + B_{0z}\vec{e}_z$  (у циліндричних координатах) моделюємо так, що радіальна і аксіальна компоненти задані формулами (2.1), а азимутальна компонента  $B_{0\theta}(r) \ll B_0$  утримуючого магнітного поля описує обертальне перетворення, обумовлене аксіальним струмом у плазмі токамаків або струмами в котушках модульних стеллараторів.

У гофрованому магнітному полі електромагнітне збурювання поширюється у вигляді хвильового пакета, у якому поряд з основною гармонікою присутнє, узагалі кажучи, нескінченне число сателітних гармонік. Можливість додаткового нагрівання плазми поблизу сателітного АР у гофрованому магнітному полі було показано в [147]. У цьому підрозділі досліджено вплив помірного гофрування утримуючого магнітного поля на конверсію і поглинання АХ в області локального АР для основної гармоніки. Показано, що внесок неоднорідності магнітного поля при визначенні структури АР може бути того ж порядку, що й обумовлений зіткненнями частинок, скінченням іонним ларморовським радіусом або інерцією електронів.

Сформулюємо постановку задачі. При дослідженні альфвенівської і швидкої магнітозвукової гілок МГД хвиль у плазмі з малим газокінетичним тиском інерцією електронів можна знехтувати усюди, крім вузької області локального АР. Використання умов малості гофрування і малості інерції електронів ( $|\varepsilon_3| \rightarrow \infty$ ) при розв'язанні рівнянь Максвелла призводить до рівності нулю у всьому об'ємі плазми поздовжнього компонента електричного поля хвилі:  $E_3 = (B_{0r}E_r + B_{0\theta}E_\theta + B_{0z}E_z) / |\vec{B}_0| \rightarrow 0$ . Отримане в такий спосіб співвідношення між компонентами електричного поля хвилі дозволяє за умови нехтування зіткненнями між частинками плазми, інерцією електронів і тепловим рухом іонів записати спрощену систему рівнянь Максвелла в циліндричних координатах (2.12) – (2.16).

Для розв'язання системи (2.12) – (2.16) нам будуть потрібні вирази (2.8) – (2.10) для компонентів тензора діелектричної проникливості  $\varepsilon_{l,2}$  з точністю до доданків першого порядку малості за  $\varepsilon_m$ .

Виходячи з просторової залежності (2.8) компонентів тензора діелектричної проникливості, будемо шукати розв'язок системи рівнянь (2.12) – (2.16) для радіального компонента електричного поля МГД хвилі в наступному вигляді:

$$E_r = \left[ E_z^{(0)}(r) + E_r^{(+1)}(r)e^{ik_b z} + E_r^{(-1)}(r)e^{-ik_b z} \right] \exp i(k_z z + m\vartheta - \omega t) . \quad (2.107)$$

У пакеті (2.107) поряд з основною гармонікою  $\propto \exp(ik_z z)$  ми враховуємо також дві найближчі сателітні гармоніки  $\propto \exp[i(k_z \pm k_b)z]$ . Представлення інших компонентів магнітних і електричних полів МГД хвилі у вигляді ряду є аналогічним до (2.107).

Виведемо основне рівняння цієї задачі. Скориставшись виразом (2.8) для тензора діелектричної проникливості й умовою рівності нулю поздовжнього компонента  $E_z$  електричного поля МГД хвилі, з рівнянь Максвелла одержуємо наступну систему зачеплених рівнянь для амплітуд основної  $E_r^{(0)}$  і сателітних  $E_r^{(\pm 1)}$  гармонік радіального компонента електричного поля хвилі:

$$\begin{aligned} & \left[ (\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_g B_{0g} / B_0) E_r^{(0)} - A \right] + \frac{c^2 \delta^2}{2\omega^2} \frac{d^2 E_r^{(0)}}{dr^2} + 0.5 \varepsilon_1^{(1)} E_r^{(+1)} \\ & + \frac{c^2 k_b \delta}{2\omega^2} \frac{dE_r^{(+1)}}{dr} + \frac{c^2}{\omega^2} \delta(k_z - k_b) \frac{dE_r^{(+1)}}{dr} + \frac{c^2 k_b \delta}{2\omega^2} \frac{dE_r^{(-1)}}{dr} + 0.5 \varepsilon_1^{(1)} E_r^{(-1)} \\ & - \frac{c^2}{\omega^2} \delta(k_z + k_b) \frac{dE_r^{(-1)}}{dr} = 0 , \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{c^2}{2\omega^2} \delta(\pm 2k_z + k_b) \frac{dE_r^{(0)}}{dr} + (N_z \pm N_b)^2 E_r^{(\pm 1)} \\ & - \frac{c^2 \delta^2}{2\omega^2} \frac{d^2 E_r^{(\pm 1)}}{dr^2} - N_z^2 E_r^{(\pm 1)} + \frac{c^2 \delta^2}{4\omega^2} \frac{dE_r^{(\mp 1)}}{dr} = 0 . \end{aligned} \quad (2.109)$$

Тут  $N_g = cm/\omega r$  - азимутальний показник заломлення, малий параметр  $\delta = \varepsilon_m' / k_b$  виник внаслідок урахування малого радіального компонента утримуючого магнітного поля (2.1).

Обговоримо залежність малого параметра  $\delta$  від періоду гофрування  $L$ . На перший погляд, ця залежність може видатися прямо пропорційною, оскільки  $\delta$  містить множник  $1/k_m \sim L$ . Але крім того,  $\delta$  пропорційний до похідної  $d\varepsilon_m'/dr$  за радіусом від амплітуди модуляції аксіального компонента сталого магнітного поля, а

$\varepsilon_m$  у свою чергу пропорційна функції Бесселя нульового порядку. Таким чином, залежність малого параметра від періоду гофрування пропорційна до модифікованої функції Бесселя першого порядку  $I_1(k_m r)$ .

При виведенні системи рівнянь (2.108), (2.109) використано наближення вузького шару [53]. Це наближення означає повільну зміну полів хвилі в області АР в аксіальному і азимутальному напрямках і виражається в нерівностях

$$\left| dB_z^{(0)} / dr \right| \gg \left| k_{\max} B_z^{(0)} \right|, \quad k_{\max} = \max(m/r, k_z, k_m, \omega/c). \quad (2.110)$$

Це наближення передбачає також повільну зміну густини плазми в радіальному напрямку.

Нагадаємо, що азимутальна компонента магнітного поля хвилі так само різко, як і  $E_r$ , змінюється в радіальному напрямку поблизу АР (див. (2.16)). Радіальна залежність інших компонентів електричних і магнітних полів хвилі поблизу АР виявляється слабкіше, а саме:

$$B_r, B_z, E_g \propto \ln \left( \varepsilon_1^{(0)} - N_z - 2N_z N_g B_{0g} / B_0 \right),$$

$$E_r, B_g \propto \left( \varepsilon_1^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_g B_{0g} / B_0 \right)^{-1}. \quad (2.111)$$

Відзначимо, що незважаючи на те, що поля  $B_z^{(0)}$  і  $E_g^{(0)}$  мають у холодному наближенні логарифмічну особливість поблизу резонансу, комбінація  $A = \left( -i\varepsilon_2^{(0)} E_g^{(0)} - N_g B_z^{(0)} \right)_{r=r_A}$  у квадратних дужках у рівнянні (2.108) повільно змінюється поблизу локального резонансу [53, 186, 187].

Нагадаємо, як впливає неоднорідність утримуючого магнітного поля, яку взято до уваги в цьому підрозділі, на поширення МГД хвиль поза областю локального резонансу. Поза областю АР, у якому

$$\varepsilon_1^{(0)} = N_z^2 + 2N_z N_g B_{0g} / B_0, \quad (2.112)$$

система рівнянь Максвелла може бути розв'язана за теорією збурень [32, 189]. Оскільки за умови відсутності гофрування утримуючого магнітного поля ( $\varepsilon_m = 0$ ) гармоніки МГД хвилі з різними аксіальними хвильовими числами й азимутальними номерами поширюються незалежно, вважаємо тут, що в нульовому наближенні відмінна від нуля тільки амплітуда  $E_r^{(0)}$  основної гармоніки МГД хвилі. Розпо-



діл полів у цьому випадку докладно досліджено (див., наприклад, [13, 175]), тому розподіл ВЧ полів поза областю АР вважаємо тут відомим. Врахування азимутальної компоненти сталого магнітного поля змінює амплітуду основної гармоніки на малу величину порядку  $(B_{0g} / B_0)$  [189]. Вплив гофрування утримуючого магнітного поля на амплітуду основної гармоніки відчувається в другому порядку малості за параметром гофрування  $\varepsilon_m$ . Амплітуди сателітних гармонік при цьому на порядок менші [32] за амплітуду основної гармоніки,

$$E_r^{(\pm 1)} \sim \varepsilon E_r^{(0)}. \quad (2.113)$$

Дослідимо тепер конверсію і поглинання МГД хвиль поблизу локального АР. Оскільки амплітуди основної гармоніки, а разом із нею і сателітних, резонансно підростають поблизу АР, тому не слід використовувати умову (2.113) при аналізі системи рівнянь (2.108), (2.109) поблизу локального АР (2.112). Подальший розгляд показує, що співвідношення (2.113) дійсно перестає бути справедливим поблизу АР.

Система (2.108), (2.109) зводиться до наступного диференціального рівняння шостого порядку для амплітуди основної гармоніки  $E_r^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{3}{16} \frac{c^4}{\omega^4} \delta^4 \frac{d^4}{dr^4} \left[ (\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_g B_{0g} / B_0) E_r^{(0)} + A \right] \\ & - \frac{c^2}{\omega^2} \delta^2 N_b^2 \frac{d^2}{dr^2} \left[ (\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_g B_{0g} / B_0) E_r^{(0)} + A \right] \\ & + N_b^2 (N_b^2 - 4N_z^2) \left[ (\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_g B_{0g} / B_0) E_r^{(0)} + A \right] + \frac{3}{32} \frac{c^6}{\omega^6} \delta^6 \frac{d^6}{dr^6} E_r^{(0)} \Big|_{(6,6)} \\ & - \frac{1}{8} \frac{c^4}{\omega^4} \delta^4 (N_b^2 + 4N_z^2) \frac{d^4}{dr^4} E_r^{(0)} \Big|_{(4,4)} - \frac{3}{8} \frac{c^3}{\omega^3} \delta^3 N_b \varepsilon_1^{(1)} \frac{d^3}{dr^3} E_r^{(0)} \Big|_{(4,3)} \\ & + \frac{1}{2} \frac{c}{\omega} \delta N_b \varepsilon_1^{(1)} (N_b^2 - 4N_z^2) \frac{d}{dr} E_r^{(0)} \Big|_{(2,1)} = 0. \end{aligned} \quad (2.114)$$

У цьому рівнянні два нижніх індекси приписано кожному з останніх чотирьох доданків. Пояснимо їхній зміст на прикладі останнього доданка. Індеси (2,1) говорять, що в цьому доданку **квадратичний** за малим параметром коефіцієнт стоїть при **першій** похідній. Аналіз співвідношення між порядком малості коефіцієнта і

порядком відповідної похідної дозволяє спростити рівняння (2.114) до наступного вигляду:

$$-\frac{1}{8} \frac{c^4}{\omega^4} \delta^4 (N_b^2 - 4N_z^2) \frac{d^4}{dr^4} E_r^{(0)} + N_b^2 (N_b^2 - 4N_z^2) \left[ (\varepsilon_1^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_g B_{0g} / B_0) E_r^{(0)} + A \right] = 0. \quad (2.115)$$

Після розв'язання рівняння (2.115) можна проаналізувати точність, із якою це рівняння відповідає рівнянню (2.114).

Розв'язок рівняння (2.115) знаходимо методом Лапласа,

$$E_r^{(0)} = (a^* k_1 / N_z^2) A u_0 [k_1 (r - r_A)], \quad (2.116)$$

де

$$u_0(\xi) = \int_0^\infty \exp[i(t\xi + t^5/5)] dt, \\ k_1 = \left( \frac{c^4 \delta^4 a^*}{8\omega^4 N_b^2 N_z^2} \frac{N_b^2 + 4N_z^2}{N_b^2 - 4N_z^2} \right)^{-1/5} \sim [k_z^2 k_b^2 / (\delta^4 a)]^{1/5} \propto \delta^{-4/5}, \quad (2.117)$$

$a^* = \left| d \ln |\varepsilon_1^{(0)}| / dr \right|^{-1}_{r_A}$  - характерний радіальний масштаб, на якому змінюється густина плазми. Цей розв'язок задовольняє наступним крайовим умовам: він є обмеженим як у точці резонансу, так і при віддаленні від неї; він описує конверсію електромагнітної хвилі в дрібномасштабну хвилю, що несе енергію від точки резонансу; він стає загасаючим при врахуванні слабкої дисипації в  $\varepsilon_l^{(0)}$ . Графік функції  $u_0(\xi)$  наведено на рис. 1.8 (реальну частину зображено суцільною лінією, уявну – штриховою).

Коефіцієнт при другому доданку в рівнянні (2.115) звертається в нуль, і отже, наш розв'язок втрачає зміст для хвиль, у яких аксіальна довжина хвилі у два рази довша за період гофрування,  $2k_z = k_m$ . При цьому дві основні гармоніки, які зв'язані в один хвильовий пакет гофруванням сталого магнітного поля, відчувують свій АР в одному й тому самому місці. Зазначимо, що вплив гофрування постійного магнітного поля на структуру АР у цьому резонансному випадку досліджений в [152].

Ширина  $\Delta r = |k_l|^{-1}$  АР дорівнює за порядком величини ширині АР у резонан-

сному випадку й у  $\delta^{-2/15}$  разів менша ширини сателітного АР, вивченого у роботі [155] у випадку, коли його структура визначається гофруванням постійного магнітного поля. Відповідно, характерне значення амплітуди  $E_r^{(0)}$  основної гармоніки радіального компонента електричного поля хвилі в локальному АР може бути оцінене з рівнянь (2.116) і (2.117) за порядком величини,

$$E_r^{(0)} \sim ak_1 A / N_z^2 \sim \left( \frac{\omega^4 a^4 N_b^2}{\delta^4 N_z^8 c^4} \right)^{\frac{1}{5}} A. \quad (2.118)$$

Щоб поле  $E_r^{(0)}(r_A)$  хвилі було одного порядку з амбіполярним електричним полем  $\sim T/ea$ , необхідно, щоб поле хвилі накачування дорівнювало за порядком величини,

$$E_g \sim \frac{m_i \rho_{Li}^2 \omega^3 c_i}{e \omega a^2} \left( \frac{a \delta^4}{k_b^2 k_z^2} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (2.119)$$

За цієї умови нелінійними ефектами поблизу АР можна знехтувати.

Коли ми приступали до аналізу системи рівнянь (2.108), (2.109), ми відмовилися від використання співвідношення (2.113) поблизу АР. З точністю до доданків порядку  $\delta^{2/5}$  з рівняння (2.109) одержуємо спрощені вирази для амплітуд сателітних гармонік,

$$E_r^{(\pm 1)} = -(\varepsilon' / 2k_b^2) dE_r^{(0)} / dr, \quad E_r^{(\pm 2)} = -(\varepsilon' / 4k_b^2) dE_r^{(\pm 1)} / dr \dots \quad (2.120)$$

Тобто амплітуда  $n$ -ї сателітної гармоніки за порядком величини в  $\delta^{-n/5}$  разів менша амплітуди основної гармоніки,

$$E_r^{(\pm 1)} \sim \frac{k_1 \delta}{k_b} E_r^{(0)} \sim \left( \frac{\omega^3 a^3}{\delta^3 c^3 N_b N_z^6} \right)^{\frac{1}{5}} A. \quad (2.121)$$

Незважаючи на те, що амплітуди сателітних гармонік поблизу АР зростають швидше амплітуди основної гармоніки, вони все-таки залишаються меншими за неї. Однак їхня малість у порівнянні з амплітудою основної гармоніки стає поблизу АР менш вираженою, ніж поза резонансом.

Тепер можемо оцінити також і точність, з якою відбувся перехід від рівняння (2.114) до спрощеного рівняння (2.115). Найбільший з відкинутих доданків,

$-\frac{c^2}{\omega^2} \delta^2 N_b^2 \frac{d^2}{dr^2} \left[ \left( \varepsilon_1^{(0)} - N_z^2 - 2N_z N_g B_{0g} / B_0 \right) E_r^{(0)} + A \right]$ , є малим в порівнянні з залишеним третім доданком у (2.114), як величина  $\sim \delta^{2/5}$ . Перший доданок у (2.114) є малим, як величина порядку  $\delta^{4/5}$ . Доданки, яким приписані індекси  $(i,j)$ , можуть бути оцінені в порівнянні з залишеним доданком з індексом  $(4,4)$ , як малі величини порядку  $\delta^{(i-4-0.8(j-4))}$ .

Серед амплітуд основних гармонік найбільше зростає поблизу АР у порівнянні з величиною, якою вона характеризується поза АР, саме аксіальний компонент електричного поля хвилі:

$$E_z \approx \frac{ic}{\omega \varepsilon_3} \frac{\partial B_g}{\partial r} = \frac{ic}{\omega \varepsilon_3} N_z \frac{\partial E_r}{\partial r} \sim \frac{k_z a}{N_z^2} \rho_{Li}^2 \left( \frac{k_z^2 k_b^2}{\delta^4 a} \right)^{\frac{2}{5}} A. \quad (2.122)$$

Цей компонент залишається набагато меншим за радіальний компонент поля  $E_r^{(0)}$ , і впливом  $E_z$  на перехід частинок плазми зі стану захоплених до стану пролітних в лінійному за амплітудою хвилі наближенні можна знехтувати.

Визначимо тепер умови, за яких структура локального АР визначається гофруванням постійного магнітного поля, а не інерцією електронів, ларморовським радіусом іонів  $\rho_{Li} = v_{Ti} / \omega_{ci}$  ( $v_{T\alpha} = \sqrt{T_\alpha / m_\alpha}$  - тепла швидкість частинок сорту  $\alpha$ ,  $T_\alpha$  - їхня температура) чи зіткненнями частинок плазми. Ці слабкі ефекти можна врахувати в рівнянні (2.115) шляхом наступної заміни:

$$\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 \rightarrow \varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 + i\varepsilon_l^{(c)} + \left( \varepsilon_T + \frac{\varepsilon_l^{(0)}}{\varepsilon_3} \right) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}. \quad (2.123)$$

- аналогічно тому, як це робилося у випадку аксіального магнітного поля [53, 186, 187]. Зміна параметрів плазми в області АР вважається слабкою, тому можна скористатися значенням величин  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_l^{(c)}$ ,  $\varepsilon_{1,2}^{(0,1)}$  і  $\varepsilon_1^{(2)}$  в точці  $r = r_A$ . Тут доданок  $(i\varepsilon_l^{(c)})$  наведений в підрозділі 1.3 формулою (1.124) якраз і враховує зіткнення між частинками плазми [184]. Коефіцієнт  $\varepsilon_T$  у заміні (2.123) також виписаний у підрозділі 1.3 (див. формулу (1.126)), він враховує скінченний іонний ларморовський радіус [185]. Інерція електронів також врахована в (2.123) через компоненту  $\varepsilon_3$  те-

нзора діелектричної проникливості, для якої можна скористатись наведеними в підрозділі 1.3 визначеннями (1.127) – (1.130).

Умови, за яких вплив слабкої аксіальної періодичної неоднорідності  $\vec{B}_0$  на структуру АР сильніший за вплив інших слабких ефектів, можуть бути легко отримані з аналізу (2.123). Зокрема, вплив неоднорідності  $\vec{B}_0$  сильніший за вплив скінченного Ларморівського радіуса іонів, якщо

$$\delta^{1/5} > (\rho_{Li}/a)^2 (k_z k_b a^2)^{6/5}. \quad (2.124)$$

Ця умова може бути виконана в периферійній плазмі, де гофрування сталого магнітного поля найбільш істотне, і плазма холодніша, ніж у центрі. Умова (2.124) може реалізуватися за більш низьких температур, ніж аналогічна умова у випадку сателітного АР [155]. Нерівність (2.124) можна інтерпретувати в такий спосіб. Радіальне відхилення  $r-r_A$  магнітної поверхні (2.5) від циліндра із середнім радіусом більше характерної ширини  $(\rho_{Li}^2 a)^{1/3}$  АР, відомої для випадку аксіального магнітного поля [1]. За умови (2.124) ширина резонансної області  $\Delta r$  є більшою, ніж у випадку аксіального магнітного поля,  $\Delta r \sim k_l^{-1} > (\rho_{Li}^2 a)^{1/3}$ .

Оцінимо значення малого параметра гофрування, при якому впливом гофрування вже не можна знехтувати при дослідженні конверсії АХ в області локального АР в уловлювачах з параметрами Helias [170]. Вплив гофрування є одного порядку з ефектом скінченності ларморівського радіуса іонів (див. (2.124)), якщо при цьому аксіальне хвильове число є досить малим,  $k_z^{6/5} < 10^{-2}$  (тут  $k_z$  слід брати в сантиметрах), тобто для цілком реальних для сучасних пристроїв КТС значень  $k_z$ .

Обчислимо електромагнітну енергію, що поглинається одиницею довжини плазмового шнура поблизу АР. Ця потужність складається з роботи, виконуваної електричним полем хвилі над радіальними ВЧ струмами,  $P_r = 0.5 \operatorname{Re} \left\{ \int j_r^* E_r 2\pi r dr \right\}$ , і роботи над аксіальними ВЧ струмами,  $P_z = 0.5 \operatorname{Re} \left\{ \int j_z^* E_z 2\pi r dr \right\}$ , де

$$P_r = \frac{r\omega}{4} \left| \frac{d\varepsilon_1}{dr} \right|^{-1} |A|^2 \Big|_{r=r_A} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_0(x)) dx, \quad (2.125)$$

$$P_z = \frac{r\omega k_1^3 a^2}{4|\varepsilon_3|^2 k_b^2} \text{Im}(\varepsilon_3)_{r=r_A} |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |u'_0(x)|^2 dx. \quad (2.126)$$

Якщо замінити функцію  $u_0$  у виразі (2.125) функцією Ейрі, то цей вираз збіжиться з виразом для потужності, що поглинається поблизу АР у випадку, коли його структура визначається скінченним ларморівським радіусом іонів чи скінченною інерцією електронів (див., напр., [53, 187]). Інтеграл від уявної частини  $u_0$  у правій частині (2.125) виявляється рівним  $\pi$  точно так само, як і у випадку інтегрування уявної частини функції Ейрі. Тобто, ВЧ потужність, що поглинається поблизу АР за рахунок роботи над радіальними ВЧ струмами, не залежить від того, у якого типу дрібномасштабну хвилю (кінетичну чи обумовлену гофруванням) трансформується великомасштабна електромагнітна хвиля поблизу АР.

Як було відзначено в [147], внесок ВЧ потужності  $P_z$  може бути не малим у порівнянні з  $P_r$ , якщо  $\text{Im}(\varepsilon_3) \geq \text{Re}(\varepsilon_3)$ . Вираз (2.126) збігається з аналогічним виразом для ВЧ потужності, що поглинається поблизу АР за рахунок роботи ВЧ полів над аксіальними ВЧ струмами у випадку, коли структура АР визначається скінченним ларморівським радіусом іонів чи скінченною інерцією електронів, з точністю до заміни функції  $u_0$  функцією Ейрі від аргументу  $[k_l(r-r_A)]$ , помноженої на малий множник  $(k_l/k_T)^3$ . Тут

$$k_T^3 = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial r} \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_T \varepsilon_3 + N_z^2}. \quad (2.127)$$

Виходячи з асимптотики функції  $u_0$ , можна сказати, що  $|u'_0(\xi)|^2 \propto (-\xi)^{1/4}$  при  $\text{Re}(\xi) \rightarrow -\infty$ , і отже, інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u'_0(x)|^2 dx$  у виразі (2.126) розходиться. Ця розходимість усувається в результаті врахування дисипативних явищ – зіткнень між частинками плазми чи загасання Ландау (тобто  $\text{Im}(\varepsilon_3)$ ). Якщо дисипативні ефекти істотні настільки, що має місце співвідношення  $\text{Im}(\varepsilon_3) \sim \text{Re}(\varepsilon_3)$ , то відповідний інтеграл від квадрата похідної функції Ейрі можна оцінити як величину порядку одиниці. Коефіцієнт загасання дрібномасштабної хвилі в розглянутому тут випадку легко оцінити з рівняння (2.115) з урахуванням заміни (2.123):

$$Im(k_I) \sim k_I^4 / (2k_T^3). \quad (2.128)$$

У результаті підінтегральний вираз в (2.126) зменшується пропорційно до  $\exp[2 Im(k_I)(r-r_A)]$  вздовж негативної півосі інтегрування, і інтеграл можна оцінити за порядком величини, як  $k_T^3/k_I^3$ . Це свідчить про те, що ВЧ потужність, яка поглинається поблизу АР за рахунок роботи над аксіальними ВЧ струмами, також не залежить від того, у дрібномасштабну хвилю якого типу трансформується великомасштабна електромагнітна хвиля поблизу АР, принаймні, за порядком величини.

Обговоримо здобуті результати. Відомо, що у випадку однорідного аксіального магнітного поля структура локального АР і резонансне поглинання ВЧ потужності визначаються зіткненнями, скінченням ларморівським радіусом іонів і інерцією електронів. У цьому підрозділі показано, що в циліндричній плазмі, яка знаходиться в сталому магнітному полі, яке є періодично неоднорідним в аксіальному напрямку, структура АР може істотно залежати від ступеня гофрування магнітного поля. Умови, за яких вплив дослідженого фактора є визначальним, реалізуються, наприклад, у модульних стеллараторах серії Wendelstein, Німеччина.

Вплив гофрування утримуючого магнітного поля на структуру АР виявляється також у зсуві точки АР від осі плазмового циліндра на малу відстань  $\delta r$  ( $r_A \rightarrow r_A + \delta r$ ),

$$\delta r = -\varepsilon_1^{(2)} \left( \partial \varepsilon_1^{(0)} / \partial r \right)_{r=r_A}^{-1}, \quad (2.129)$$

де малу поправку другого порядку  $\varepsilon_1^{(2)}$  задано формулою (2.11). З вигляду  $\varepsilon_1^{(2)}$  не можна зробити однозначний висновок про знак  $\delta r$ . Але, наприклад, якщо область АР лежить у глибині плазмового циліндра ( $r \sim 0.5a_p$ , де  $a_p$  - радіус плазми) з параболічним профілем густини,  $n(r) = n(0)(1-r^2/a_p^2)$ , і гофрування слабо змінюється в об'ємі плазми,  $|r\varepsilon'| \ll |\varepsilon|$ , то внаслідок гофрування  $\vec{B}_0$  область АР віддаляється від осі на відстань порядку  $\delta r \sim \varepsilon^2 a_p$ .

Визначено умови (напр., (2.124)), за яких вплив гофрування магнітного поля на структуру АР сильніший, ніж інших малих факторів (дисипації, скінченного ларморівського радіуса іонів, інерції електронів). Ці умови можуть виконуватися

в периферійній плазмі, де гофрування є особливо істотним, і де плазма більш холодна.

Розподіл ВЧ полів хвилі визначено з розв'язання скороченого рівняння (2.115), що є справедливим з точністю до малих доданків порядку  $\varepsilon_m^{2/5}$ .

З рівняння (2.120) видно, що поблизу АР амплітуди сателітних гармонік зростають швидше, ніж амплітуда основної гармоніки, і майже симетрично:  $E_r^{(+1)} \approx E_r^{(-1)}$ ,  $E_r^{(+2)} \approx E_r^{(-2)}$  ... Сателітні гармоніки залишаються малими величинами порядку  $\varepsilon_m^{1/5}$  поблизу АР у порівнянні з амплітудою основної гармоніки. Їхній зворотний вплив на поведінку основної гармоніки  $E_r^{(0)}(r)$  призводить до усунення розриву розв'язків рівнянь Максвелла, що має місце поблизу АР у холодному наближенні в прямому утримуючому магнітному полі. Цим аксіальна періодична неоднорідність плазми принципово відрізняється, наприклад, від тороїдної неоднорідності утримуючого магнітного поля, вплив якої виражається в малій зміні форми поверхні, на якій відбувається зазначений розрив [42, 43].

Деякі висновки можна зробити також з порівняння здобутих результатів із результатами дослідження впливу неоднорідності гвинтового сталого магнітного поля (1.3) на структуру локального АР, виконаним у підрозділі 1.4. Зазначимо, що ці дві магнітні конфігурації відрізняються одна від одної в принципі: вони не можуть бути отримані одна з іншої ні в якому граничному випадку. Але результати цих двох досліджень призводять до наступного основного спільного висновку. Модуляція саме радіального компонента утримуючого магнітного поля визначає просторовий розподіл ВЧ хвилі в області АР при виконанні відповідних умов, подібних до нерівностей (1.170) та (2.124).

У цій частині висновки нашої роботи суперечать висновкам роботи [201], де розглядалася близька задача про поширення АХ у магнітному полі одиночної адіабатичної пастки. Проведені там аналітичні оцінки і числові розрахунки показали, що двовимірною неоднорідністю системи не усуває АР. Зазначене протиріччя пояснюється використанням у роботі [201] дисперсійного рівняння, отриманого в наближенні геометричної оптики (!), а це наближення не можна застосовувати поблизу АР.



В даному підрозділі обчислено ВЧ потужність, що поглинається поблизу АР унаслідок конверсії електромагнітної хвилі в дрібномасштабні хвилі, існування яких обумовлено гофруванням, що потім поглинаються за рахунок зіткнень між частинками плазми та механізму Ландау. Її величина збіглася з величиною ВЧ потужності, що поглинається поблизу АР як у випадку, коли поглинання визначається зіткненнями, так і у випадку, коли поглинання обумовлене конверсією електромагнітної хвилі в дрібномасштабну кінетичну АХ.

Відзначимо, що локальний резонанс (2.112) може мати місце як для АХ і ШМЗХ із  $\omega < \omega_{ci}$  (якщо  $k_z^2 > \omega^2/c^2$ ), так і для ШМЗХ із  $\omega > \omega_{ci}$  (якщо  $k_z^2 < \omega^2/c^2$ ) - у розрідженій плазмі. Конверсія і поглинання ШМЗХ з  $\omega > \omega_{ci}$  і  $k_z^2 < \omega^2/c^2$  в області локального резонансу (2.112) на периферії циліндричної плазми у випадку точно аксіального магнітного поля досліджені в [198, 200].

#### 2.4. Резонансний вплив періодичної аксіальної неоднорідності постійного магнітного поля на структуру локального альфвенівського резонансу

Цей підрозділ присвячено вивченню тонкої структури АР для МГД коливань із резонансним значенням (2.19) аксіального хвильового вектора  $k_z$  основної гармоніки [152, 155]. Тобто йдеться про такі електромагнітні хвилі, аксіальна довжина основної гармоніки яких удвічі перевищує аксіальний період  $L$  неоднорідності постійного магнітного поля (2.1). Умова (2.19) може бути виконана тільки в токамаках із парним числом  $N$  котушок тороїдного магнітного поля. Так відбувається в TCV, Швейцарія ( $N=16$ ); LCT-1, Сполучені Штати Америки ( $N=100$ ); Ignitor, Італія ( $N=24$ ); JET, ЄВРАТОМ ( $N=8$ ) тощо. Ця резонансна умова вказує на слабкий зв'язок між гармоніками, що характеризуються протилежними значеннями аксіального хвильового числа, у випадку, коли цей зв'язок обумовлено аксіальною періодичною неоднорідністю постійного магнітного поля (2.1). Тому обидві основні гармоніки, які зв'язані в один хвильовий пакет гофруванням сталого магнітного поля, відчувають свій АР в одному місці.

Оскільки в даному підрозділі не вивчаються хвилі з аксіальними хвильовими числами, що відрізняються від зазначених у резонансній умові (2.19) (це було вже виконано в попередньому підрозділі), значення результатів цього дослідження для задачі нагрівання плазми, під час якого зазвичай спостерігається широкий спектр аксіальних хвильових чисел, може видатися на перший погляд несуттєвим. Однак, відзначимо, що ВЧ потужність, збуджувана антеною, зазвичай найбільше накачується саме у хвилі з аксіальними хвильовими числами порядку  $2\pi/L_z$ . У свою чергу аксіальний розмір  $L_z$  антени зазвичай обмежується відстанню між двома портами, що приблизно дорівнює періоду гофрування  $L$ . Тому поглинання ВЧ потужності в області АР, що відповідає електромагнітним хвилям із резонансним значенням (2.19) аксіального хвильового числа основної гармоніки, може бути істотним.

У цьому підрозділі просторовий розподіл МГД полів в області АР визначений для умов резонансного випадку (2.19). Отримано умови, за яких структура АР визначається саме слабкою періодичною неоднорідністю плазми, а не іншими слабкими ефектами. Розраховано щілину в альфвенівському континуумі, викликану гофруванням  $\vec{B}_0$ . Головна відмінність у фізичній постановці цієї роботи від попередніх робіт (наприклад, [23], у якій було враховано тороїдну неоднорідність сталого магнітного поля) полягає в тому, що стале магнітне поле містить ненульовий періодичний радіальний компонент,  $B_{0r} \neq 0$ .

Одержимо основне рівняння цієї задачі. Припущення про малість гофрування дозволяє записати вирази для компонентів  $\varepsilon_{l,2}$  у формі ряду Фур'є (2.17), в якому досить утримати доданки лише першого порядку малості за  $\varepsilon_m$ . Нехтування інерцією електронів,  $|\varepsilon_3| \rightarrow \infty$ , дозволяє спростити систему рівнянь Максвелла до вигляду (2.12) – (2.16). При виведенні системи (2.12) – (2.16) знехтовано також зіткненнями й ефектом скінченного іонного ларморівського радіуса  $\rho_{Li} = v_{Ti}/\omega_{ci}$ .

Виходячи із симетрії проблеми, зокрема, використовуючи симетрію виразів (2.18), і маючи на увазі резонансну умову (2.19), розв'язок рівнянь Максвелла (2.12) – (2.16) слід шукати у наступному вигляді,

$$E_r = \left\{ E_r^{(+1)}(r) e^{ik_z z} + E_r^{(-1)}(r) e^{-ik_z z} + E_r^{(+3)}(r) e^{i3k_z z} + E_r^{(-3)}(r) e^{-i3k_z z} \right\} \times \exp[i(m\vartheta - \omega t)]. \quad (2.130)$$

Представлення у вигляді ряду Фур'є для інших компонентів магнітних і електричних полів хвилі подібні (2.130). Амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік, як відомо, є малими величинами,

$$E_r^{(\pm 3)} \sim \left| \varepsilon_m E_r^{(\pm 1)} \right|, \quad (2.131)$$

усюди в плазмовому шнурі, крім області АР. Зазначимо, що тут наперед не зроблено припущення про те, що амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік є також малими й в області АР, тобто тут не вважається заздалегідь, що співвідношення (2.131) є таким, яке виконується в області АР. Результати проведеного дослідження підтверджують, що ці співвідношення є несправедливими там.

При розв'язанні задачі використовувався метод «вузького шару» [53]. Він передбачає повільну зміну густини плазми і постійного магнітного поля в радіальному напрямку в області АР. Повільна зміна полів у всіх напрямках, крім радіального, також припускається,

$$(\partial E_r / \partial r) \gg k_{max} |E_r|, \quad k_{max} = \max(m/r_A, k_z, \omega/c). \quad (2.132)$$

Підставляємо вирази (2.130) для полів МГД хвилі і (2.18) для компонентів тензора діелектричної проникливості плазми до рівнянь Максвелла (2.12) – (2.16) і виділяємо члени, пропорційні до  $\exp(\pm i k_z z)$  і  $\exp(\pm i 3 k_z z)$ . Слід підкреслити ще раз, що ми не звертаємо при цьому уваги на порядок цих доданків відносно  $\varepsilon_m$ . Оскільки рівняння для радіального компонента електричного поля є найзручнішим для вивчення структури АР, то можна обмежитися тут тільки записом наступної замкнутої системи чотирьох рівнянь, яку дістаємо з (2.12) – (2.16),

$$B_g^{(\pm 1)} = \pm N_z E_r^{(\pm 1)} \pm \frac{c \varepsilon'_m}{2 \omega k_b} \frac{\partial}{\partial r} (E_r^{(\mp 1)} - E_r^{(\pm 3)}), \quad (2.133)$$

$$B_g^{(\pm 3)} = \pm 3 N_z E_r^{(\pm 3)} \pm \frac{c \varepsilon'_m}{2 \omega k_b} \frac{\partial}{\partial r} E_r^{(\pm 1)}, \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 \right) E_r^{(\pm 1)} + \frac{\varepsilon_l^{(1)}}{2} \left( E_r^{(\mp 1)} + E_r^{(\pm 3)} \right) + \left( i \varepsilon_2^{(0)} E_g^{(\pm 1)} + \frac{cm}{\omega r} B_z^{(\pm 1)} \right) = \\
& = \pm N_z \left( B_g^{(\pm 1)} \mp N_z E_r^{(\pm 1)} \right) \pm \frac{c \varepsilon_m'}{2 \omega k_b} \frac{\partial}{\partial r} \left( B_g^{(\mp 1)} - B_g^{(\pm 3)} \right), \quad (2.135)
\end{aligned}$$

$$\left[ -8 N_z^2 + \left( \frac{c \varepsilon_m'}{2 \omega k_b} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] E_r^{(\pm 3)} = \frac{c^2 \varepsilon_m'}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(\pm 1)}}{\partial r} + \left( \frac{c \varepsilon_m'}{2 \omega k_b} \right)^2 \frac{\partial^2 E_r^{(\mp 1)}}{\partial r^2}. \quad (2.136)$$

Комбінація  $\left( i \varepsilon_2^{(0)} E_g^{(\pm 1)} + \frac{cm}{\omega r} B_z^{(\pm 1)} \right) = A^{(\pm)}$  в лівій частині (2.135) виявляється такою, що повільно змінюється поблизу АР, хоча обидва поля  $E_g^{(\pm 1)}$  і  $B_z^{(\pm 1)}$  мають особливість (1.2) в області АР у холодному наближенні. Саме тому природно розглядати цю комбінацію як константу, що фактично зв'язана з хвилею накачування. Щоб одержати необхідне рівняння для  $E_r^{(\pm 1)}$ , слід підставити рівняння (2.133), (2.134) і (2.136) до рівняння (2.135). Жирним шрифтом в (2.135) позначено ті доданки, що відрізняють це рівняння від аналогічного у випадку прямого постійного магнітного поля. Саме ці доданки визначають особливості структури АР. Важливо підкреслити, що права частина (2.135) не містить у точності доданків першого, другого і третього порядку за параметром  $\varepsilon_m$ .

Щоб спростити подальший розгляд, припускаємо, що другий доданок  $\propto \partial^2 / \partial r^2$  у квадратних дужках у лівій частині (2.136) є малим у порівнянні з  $N_z^2$ . У результаті можна здобути наступне рівняння для амплітуд  $E_r^{(\pm 1)}$  основних гармонік МГД хвилі,

$$\begin{aligned}
& \left( \varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 - \frac{\varepsilon_l^{(1)} \varepsilon_m'}{4 k_b^2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\varepsilon_m'^4 c^2}{32 k_b^6 \omega^2} \frac{\partial^4}{\partial r^4} \right) E_r^{(\pm 1)} \\
& + \frac{\varepsilon_l^{(1)}}{2} \left[ E_r^{(\mp 1)} - \frac{1}{8} \left( \frac{\varepsilon_m'}{k_b^2} \right)^2 \frac{\partial^2 E_r^{(\mp 1)}}{\partial \cdot r^2} \right] = -A^{(\pm)}. \quad (2.137)
\end{aligned}$$

Подальший аналіз (2.137) показує, що можна знехтувати доданком, який містить першу похідну в порівнянні з доданком, пропорційним до четвертої похідної. З тією же самою точністю можна знехтувати другим доданком у квадратних

дужках у (2.137). У результаті цих спрощень основне рівняння набуває кінцевого вигляду, який і буде досліджено,

$$\left( \varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 + \frac{\varepsilon_m'^4 c^2}{32 k_b^6 \omega^2} \frac{\partial^4}{\partial r^4} \right) E_r^{(\pm l)} + \frac{\varepsilon_l^{(l)}}{2} E_r^{(\mp l)} = -A^{(\pm)}. \quad (2.138)$$

Врахування гофрування сталого магнітного поля призвело до виникнення двох нових доданків в основному рівнянні (2.138) у порівнянні з випадком прямого магнітного поля. Перший з цих доданків містить амплітуду  $E_r^{(\mp l)}$  іншої основної гармоніки, що характеризується протилежним знаком аксіального хвильового числа. Виникнення цього доданку обумовлено слабкою аксіальною періодичною неоднорідністю подовжньої складової  $B_{0z}$  постійного магнітного поля (2.1).

Щоб проаналізувати вплив цього доданка на властивості МГД хвилі, зручно

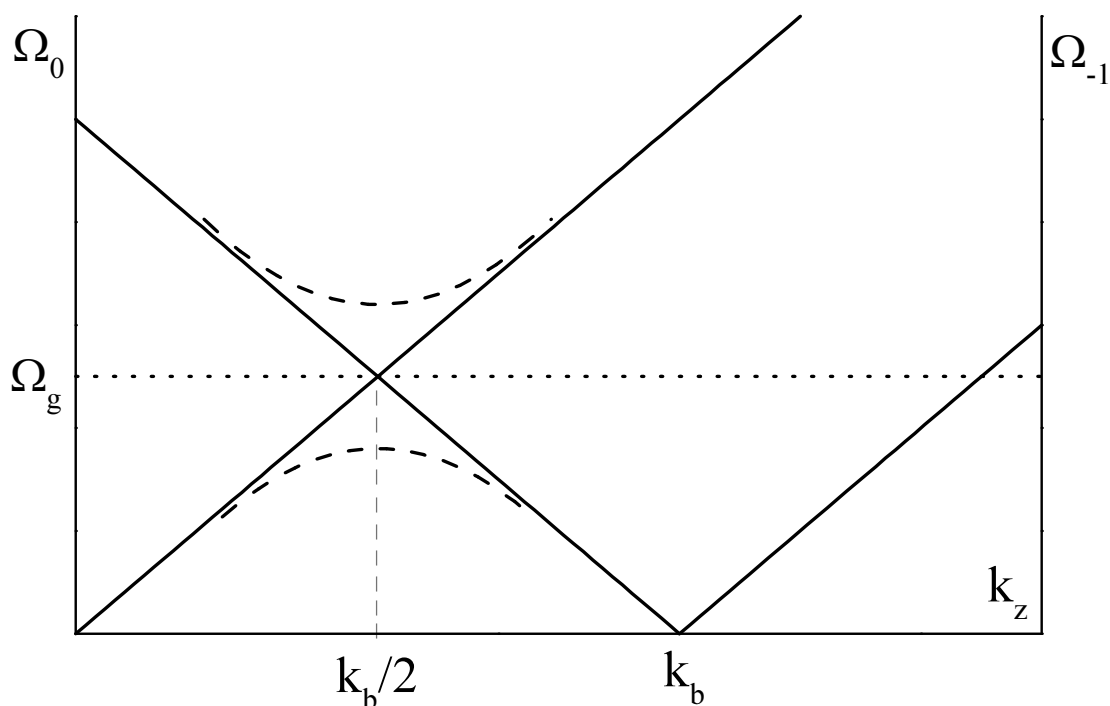


Рис. 2.2 Схематичний опис залежності резонансної альфвенівської частоти від аксіального хвильового числа. Суцільні лінії відповідають випадку прямого магнітного поля. Штрихові лінії демонструють виникнення щілини в гофрованому магнітному полі. Точкова лінія відповідає частоті генератора.

переписати систему рівнянь (2.138) у наступному вигляді:

$$\hat{Q}E_r^{(+l)} = -0,5\varepsilon_l^{(l)}E_r^{(-l)}, \quad \hat{Q}E_r^{(-l)} = -0,5\varepsilon_l^{(l)}E_r^{(+l)}, \quad (2.139)$$

де диференціальний оператор четвертого порядку  $\hat{Q}$  визначений у такий спосіб,

$$\hat{Q}E_r^{(\pm l)} \equiv \left( \varepsilon_l^{(0)} - N_z^2 + \frac{\varepsilon_m'^4 c^2}{32k_b^6 \omega^2} \frac{\partial^4}{\partial r^4} \right) E_r^{(\pm l)} - A^{(\pm)}. \quad (2.140)$$

Власні значення  $\hat{Q}$  можуть бути отримані з (2.139)

$$Q^2 = (0,5\varepsilon_l^{(l)})^2 > 0. \quad (2.141)$$

Слід підкреслити позитивність  $Q^2$  через її особливе значення. Цей факт інтерпретується в такий спосіб. Уведемо залежність  $\Omega_0(k_z) = |k_z v_A|$ , вважаючи при цьому, що значення альфвенівської швидкості  $v_A = c \omega_{ci} / \omega_{pi}(r)$  є фіксованим. Тут  $\Omega_0$  – це частота локального резонансу (тобто, якщо антена збуджує електромагнітні хвилі з частотою  $\Omega_0$ , то АР спостерігається в точці  $r=r_A$  для гармоніки з аксіальним хвильовим числом  $k_z$  у прямому магнітному полі). Потрібно також ввести залежність частоти  $\Omega_l(k_z) = |(k_z - k_b) v_A|$  для тієї ж самої фіксованої величини альфвенівської швидкості: якщо антена випромінює ВЧ потужність з частотою  $\Omega_l$ , то АР відбувається в точці  $r=r_A$  для гармоніки з аксіальним хвильовим числом  $(k_z - k_b)$  (див. рис. 2.2) у прямому магнітному полі. Ці дві криві перетинаються для резонансного значення (2.19) аксіального хвильового числа, тобто якщо електромагнітна потужність генерується з частотою  $\Omega_g = \Omega_0(k_b/2) = \Omega_l(k_b/2)$ , що відповідає перетинанню цих кривих, то обидві гармоніки мають свої локальні АР у точці  $r=r_A$ . Тоді у гофрованому магнітному полі (2.1) в альфвенівському континуумі виникає щілина,  $\Omega^2 = \Omega_0^2(0,5 k_b) (1 + \Delta_b)$ , де

$$\Delta_b = \pm \frac{1}{\omega_0^2} \left[ \frac{\partial(\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2)}{\partial(\omega^2)} \right]^{-1} \frac{\varepsilon_l^{(l)}}{2}. \quad (2.142)$$

Іншими словами, ані гармоніка з аксіальним хвильовим числом  $k_z$ , ані гармоніка з  $(k_z - k_b)$  не мають їхнього локального АР у точці  $r=r_A$ , якщо антена працює на частоті  $\Omega_g$  у гофрованому магнітному полі.

Природно порівняти цю щілину з іншою, яка викликана тороїдністю і яка

описується наступною залежністю:  $\Omega^2 = \Omega_0^2 (1 + \Delta_t)$ . Для півширини щілини  $\Delta_t$  можна записати:

$$\Delta_t = \pm \frac{1}{\omega_0^2} \left[ \frac{\partial(\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2)}{\partial(\omega^2)} \right]^{-1} \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{2}}, \quad (2.143)$$

тут

$$\varepsilon_t = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^{2(0)} - \omega^2} \frac{\partial \ln n}{\partial r} \Big| \Delta - \frac{r}{R} \frac{2\omega_{pi}^2 \omega_{ci}^{2(0)}}{(\omega_{ci}^{2(0)} - \omega^2)^2} - \frac{2r}{R} N_z^2. \quad (2.144)$$

Зазначене вище порівняння зводиться до аналізу співвідношення між параметром гофрування, і параметром  $r/R$  тороїдності ( $R$  - великий радіус тора). Останній параметр зазвичай є більшим у тороїдних уловлювачах. Але, з іншого боку, гофрування  $\vec{B}_0$  може забезпечувати утворення щілини в альфвенівському континуумі в Low Curvature Tokamak і прямих магнітних пастках.

Щілини в альфвенівському континуумі, обумовлені тороїдністю, вивчалися в [22, 23]. Власні альфвенівські моди, обумовлені тороїдністю, із частотами усередині відповідних щілин були передбачені в [23] і спостерігалися експериментально [24, 25].

Загальний вигляд виразу (2.142) добре узгоджується з висновками А. Єлфімова [22], який показав, що ширина обумовленої тороїдністю щілини в альфвенівському континуумі є пропорційною до амплітуди модуляції  $\varepsilon_l^{(1)}$  компонента тензора діелектричної проникливості  $\varepsilon_l$ .

Другий доданок, що відрізняє основне рівняння (2.138) від аналогічного у випадку прямого магнітного поля, є пропорційним до четвертої похідної. Він зв'язаний з радіальним компонентом  $B_{0r}$  сталого магнітного поля (2.1). Цей доданок є трохи більшим за порядком величини, ніж перший, вплив якого досліджено вище.

Якщо радіальний профіль густини плазми є лінійним в області АР,

$$(\varepsilon_l^{(0)} - N_z^2) = \partial \varepsilon_l^{(0)} / \partial r \Big|_{r_A} (r - r_A), \quad (2.145)$$

то аналітичний розв'язок рівняння (2.138) можна отримати методом Лапласа в наступному вигляді:

$$E_r^{(\pm 1)} = (ak_l / N_A^2) A^{(\pm)} u_0 [k_l (r - r_A)], \quad (2.146)$$

$$u_0(\xi) = \int_0^\infty \exp[i(t\xi + t^5 / 5)] dt, \quad k_l = (\varepsilon_m'^4 a / 8k_b^8)^{-1/5}. \quad (2.147)$$

Поводження функції  $u_0(\xi)$  показано на рис. 1.8 і проаналізовано в підрозділі 1.4.

Ширина  $\Delta r = k_l^{-1}$  АР у випадку, що його досліджено в цьому підрозділі, має той самий порядок величини, що і ширина АР у нерезонансному випадку (див. (2.117)). Характерне значення амплітуди  $E_r^{(\pm 1)}$  основної гармоніки радіального компонента електричного поля МГД хвилі в області АР можна оцінити з (2.138) і (2.147) за порядком величини в такий спосіб,

$$E_r^{(\pm 1)} \sim k_l a A^{(\pm)} / N_z^2. \quad (2.148)$$

Це значення має той же порядок величини, що й в нерезонансному випадку (2.118).

Нагадаємо, що протягом цього дослідження не використовувалось припущення про те, що амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік є малими в порівнянні з  $E_r^{(\pm 1)}$ . Тепер можна оцінити характерне значення  $E_r^{(\pm 3)}$  в області АР за порядком величини, використовуючи рівняння (2.136), у такий спосіб,

$$E_r^{(\pm 3)} \sim (\varepsilon_m / k_b a)^{1/5} E_r^{(\pm 1)} \sim A^{(\pm)} (k_b a / \varepsilon_m)^{3/5} / N_z^2. \quad (2.149)$$

Порівняння значень (2.131) і (2.149) показує, що амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  сателітних гармонік зростають при наближенні до області АР навіть швидше, ніж амплітуди  $E_r^{(\pm 1)}$  основних гармонік. Хоча амплітуди  $E_r^{(\pm 3)}$  і залишаються меншими, ніж  $E_r^{(\pm 1)}$ , у межах області АР, але розбіжність в порядку величини між  $E_r^{(\pm 1)}$  і  $E_r^{(\pm 3)}$  не так яскраво виражена в межах області АР, як поза нею.

Тепер можна також оцінити, що перетворення (2.135) у (2.137) та (2.137) у (2.138) є справедливими з точністю до  $(\varepsilon_m / (ak_b))^{2/5} \ll 1$ .

Одержимо умови, за яких структура локального АР у цьому резонансному випадку (2.19) визначається саме слабкою аксіальною періодичною неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , а не інерцією електронів, іонним ларморовським радіусом або зіткненнями. Врахування цих слабких явищ у (2.138) може бути легко виконано за допомогою



заміни (2.123).

Аналіз основного рівняння (2.138) з урахуванням заміни (2.123) показує, зокрема, що вплив гофрування  $\vec{B}_0$  на структуру АР є більш істотним, ніж вплив скінченного іонного ларморівського радіуса й інерції електронів, якщо справедлива наступна нерівність,

$$\varepsilon_m^{12/5} \gg (k_b a)^{12/5} (\rho_{Li}/a)^2. \quad (2.150)$$

Ця умова може бути виконана в периферійній плазмі, де гофрування  $\vec{B}_0$  найбільш істотне і плазма холодніша, ніж у глибині. Умову (2.150) можна інтерпретувати в такий спосіб. Радіальне відхилення  $r-r_A$  магнітної поверхні (2.4) від циліндра із середнім радіусом є більшим за характерну ширину  $(\rho_{Li}^2 a)^{1/3}$  області альфвенівського резонансу, яка добре відома для випадку прямого магнітного поля.

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі представлені результати теоретичного дослідження структури АР у циліндричній плазмі, яка знаходиться у гофрованому магнітному полі (2.1), для хвилі з резонансним значенням (2.19) аксіального хвильового числа. Розподіл електромагнітних полів у межах області АР визначений і проаналізований з урахуванням гофрування сталого магнітного поля, інерції електронів, іонного ларморівського радіуса й зіткнень.

Встановлено, що аксіальна періодична неоднорідність магнітного поля викликає зв'язок просторових гармонік електромагнітних хвиль із різними значеннями аксіальних хвильових чисел. Зокрема, в гофрованому магнітному полі з періодом гофрування  $L$  електромагнітні хвилі з резонансними значеннями  $k_z = \pm\pi/L$  аксіального хвильового числа належать до одного пакета (див. рівняння (2.130)), у якому враховано також дві найближчі сателітні гармоніки з аксіальними хвильовими числами  $k_z = \pm 3\pi/L$ .

Також у цьому підрозділі здобуто умову (2.150), при виконанні якої просторовий розподіл електромагнітних хвиль із резонансними значеннями аксіального хвильового числа в межах області локального АР визначається саме модуляцією радіального компонента постійного магнітного поля, а не інерцією електронів чи скінченням іонним ларморівським радіусом. Нерівність (2.150) є справедливою в

холодній периферійній плазмі, де гофрування сталого магнітного поля є найбільшим. І саме туди витісняється область локального АР внаслідок збільшення густини плазми, яке спостерігається при створенні плазми в термоядерних пастках. Характерна ширина області АР є більшою в цьому випадку, ніж у прямому магнітному полі, за однакових інших умов.

Слід зазначити, що зараз розглядаються варіанти створення Helias реактора [31] або з чотирма, або з п'ятьма модулями. Якщо його буде створено з чотирма модулями, тоді дослідження резонансного впливу дзеркальної неоднорідності на структуру АР стає актуальним і для цього проекту.

Відзначимо, що представлення (2.1) сталого радіального магнітного поля у вигляді одиночної гармоніки  $\propto \sin(k_b z)$  є дуже спрощеним. У дійсності спектр магнітного поля є широким і містить також гармоніки  $\propto \sin(j k_b z)$ ,  $j=2,3,4\dots$  У результаті аксіальна періодична неоднорідність  $\vec{B}_0$  виступає також причиною резонансного впливу на структури локальних АР для електромагнітних хвиль з аксіальними хвильовими числами  $k_z = j\pi/L$ . Однак ці явища можуть бути істотні тільки, якщо виконані умови, що подібні до нерівності (2.150).

Амплітуди сателітних гармонік збільшуються при наближенні до області АР швидше, ніж амплітуди основних гармонік. Саме тому розриви розв'язків рівнянь Максвелла для полів електромагнітних хвиль, які виникають за умови нехтування зіткненнями між частинками плазми, інерцією електронів і тепловим рухом іонів у випадку прямого магнітного поля, усуваються в гофрованому магнітному полі. Характерне значення (2.148) радіального електричного поля електромагнітної хвилі є меншим, ніж у прямому магнітному полі, за однакових інших умов.

Показано, що аксіальна періодична неоднорідність постійного магнітного поля служить причиною виникнення щілини в альфвенівському континуумі.

Відзначимо також, що сателітний АР (поблизу якого обидві сателітні гармоніки хвилі (2.130) з амплітудами  $E_r^{(\pm 3)}$  конвертуються в дрібномасштабні кінетичні хвилі) розташований глибше в плазмі, де густина плазми вища, ніж в основному АР, у дев'ять разів. Тому можна чекати, що додаткове нагрівання плазми в

сателітних АР для МГД хвиль, чия основна гармоніка характеризується аксіальною довжиною хвилі  $2L$ , буде істотним [147].

## 2.5. Тонка структура локального сателітного альфвенівського резонансу в холодній плазмі в помірно гофрованому магнітному полі

Сформулюємо, що є специфічним об'єктом дослідження у цьому підрозділі. Можливість додаткового нагрівання плазми в САР, у яких виконується умова (2.71), доведено в підрозділі 2.2. Там радіальне відхилення магнітної поверхні від циліндра з радіусом  $r_A^{(\pm)}$  вважалося меншим за характерну ширину  $\Delta r_T = (\rho_{Li}^2 a^*)^{1/3}$  області АР, що добре відома для випадку прямого магнітного поля [53]. Виникнення САР пояснюється різким зростанням амплітуд сателітних гармонік поблизу резонансних точок  $r = r_A^{(\pm)}$  (2.71). Досліджений у цьому підрозділі розподіл електромагнітних хвиль поблизу САР [155] узагальнює результати досліджень підрозділу 2.2 на випадок, коли радіальне відхилення магнітної поверхні є більшим за  $\Delta r_T$  і просторовий розподіл ВЧ полів в областях САР визначається саме аксіальною періодичною неоднорідністю гофрованого магнітного поля.

Для того, щоб здобути основні рівняння цієї задачі, слід передовсім обрати належну систему координат. Тільки в координатах, які зв'язані із силовими лініями магнітного поля, тензор діелектричної проникливості має найпростішу форму на відміну від циліндричних координат, у яких усі дев'ять компонентів тензора відрізняються від нуля для холодної плазми, розташованої в гофрованому сталому магнітному полі (2.1). Інерція електронів, як відомо, є нехтовно малою для альфвенівської і ШМЗ гілок МГД коливань. Нехтування інерцією електронів для МГД хвиль,  $|\varepsilon_3| \rightarrow \infty$ , означає, що поздовжня складова електричного поля хвилі дорівнює нулю усюди в плазмі. Використовуючи цю обставину, можна записати систему (2.12) – (2.16) рівнянь Максвелла, беручи до уваги також співвідношення (2.6) – (2.7) між компонентами вектора електричної індукції  $\vec{D}$  і напруженості електричного поля  $\vec{E}$  хвилі. Припущення про малість гофрування дозволяє записати вира-

зи для компонентів  $\varepsilon_{l,2}$  у вигляді ряду Фур'є (2.17), утримуючи доданки тільки першого порядку малості за параметром  $\varepsilon_m$ .

Симетрія задачі (зокрема, вигляд виразів (2.17) для компонентів тензора  $\varepsilon_{ik}$ ) надає підстави шукати розв'язок рівнянь Максвелла для радіального компонента електричного поля хвилі у формі хвильового пакета:

$$E_r = [E_r^{(0)}(r) + E_r^{(+1)}(r) \exp(ik_m z) + E_r^{(+2)}(r) \exp(2ik_m z)] \exp[i(k_z z + m\vartheta - \omega t)]. \quad (2.151)$$

Тут, поряд з першою сателітною гармонікою  $\propto \exp[i(k_z + k_m)z]$ , чия амплітуда має особливість у випадку холодної плазми в точці САР (2.71), також узято до уваги основну  $\propto \exp(ik_z z)$  і другу сателітну  $\propto \exp[i(k_z + 2k_m)z]$  гармоніки, з якими вона якнайсильніше зв'язана внаслідок аксіальної періодичної неоднорідності гофрованого магнітного поля (2.1).

Представлення у вигляді ряду Фур'є інших компонентів магнітних і електричних полів хвилі є аналогічними до (2.151). Такий підхід до розв'язання рівнянь Максвелла зазвичай називається методом Флоке - Блоха (див., наприклад, [174]).

При наближенні уздовж радіуса до області САР амплітуди сателітних гармонік електромагнітних полів розходяться у випадку холодної плазми в такий спосіб,

$$E_r^{(+1)}, B_\vartheta^{(+1)} \propto (\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2)^{-1}, E_\vartheta^{(+1)}, B_r^{(+1)}, B_z^{(+1)} \propto \ln|\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2|. \quad (2.152)$$

Наслідуючи методику роботи [53], скористаємось наближенням «вузького шару». Останнє передбачає повільну зміну густини плазми і постійного магнітного поля в радіальному напрямку в області САР. Передбачається також повільна зміна (2.110) полів у всіх напрямках, крім радіального.

Амплітуди перших сателітних гармонік менші від амплітуд основних гармонік приблизно у  $\varepsilon_m^{-1}$  разів усюди в плазмовому шнурі, крім області САР [147]. Однак у цьому підрозділі заздалегідь не припускається, що таке співвідношення можна застосовувати також і в області САР. Після підстановки виразів (2.151) для полів хвилі і (2.17) - для компонентів тензора діелектричної проникливості до рівнянь Максвелла (2.12) - (2.16) виділяємо в цих рівняннях доданки, що є пропорційними до Фур'є – множників  $\propto \exp[i(k_z + k_m)z]$ ,  $\propto \exp(ik_z z)$  і  $\propto \exp[i(k_z + 2k_m)z]$ , не

звертаючи уваги на порядок величини цих доданків відносно  $\varepsilon_m$ . Оскільки рівняння для радіального компонента електричного поля є найбільш зручним для вивчення структури САР, тому достатньо навести тут тільки наступну систему рівнянь, які зачіпляються, для амплітуд основної і двох сателітних гармонік, що випливають з системи (2.12) – (2.16),

$$N_b(2N_z+N_b)E_r^{(0)}+i\varepsilon_2^{(0)}E_g^{(0)}+N_gB_z^{(0)} \\ = (2N_z+N_b)\frac{c\varepsilon'_m}{2\omega k_m}\frac{dE_r^{(+1)}}{dr}+\left(\frac{c\varepsilon'_m}{2\omega k_m}\right)^2\frac{d^2E_r^{(+2)}}{dr^2}, \quad (2.153),$$

$$[\varepsilon_l^{(0)}-(N_z+N_b)^2+\lambda(d^2/dr^2)]E_r^{(+1)}=A^{(+)}, \quad \lambda=-(N_z+0.5N_b)c\varepsilon_m'^2/(2\omega k_m^3), \quad (2.154),$$

$$E_r^{(+2)}=(\varepsilon_m'/(2k_m^2))dE_r^{(+1)}/dr. \quad (2.155)$$

Незважаючи на те, що поля  $E_g^{(+1)}$  і  $B_z^{(+1)}$  розходяться (2.152) поблизу САР у холодному наближенні, права частина рівняння (2.154) змінюється повільно поблизу САР,

$$A^{(+)}=(-i\varepsilon_2^{(0)}E_g^{(+1)}-N_gB_z^{(+1)})\Big|_{r_A^{(+)}}. \quad (2.156)$$

Саме через цю обставину природно розглядати комбінацію (2.156) як константу, що фактично зв'язана з хвилею накачування. Величину  $A^{(+)}$  можна порахувати, використовуючи розв'язки рівнянь Максвелла поза областями САР. Ці розв'язки можна отримати числовими методами для довільного профілю густини (див., наприклад, [13, 175]). Праву частину рівняння (2.154) можна оцінити за порядком величини в такий спосіб,  $A^{(+)}\sim\varepsilon_m\varepsilon_2^{(0)}E_g^{(0)}$ . Повільна зміна комбінації (2.156) поблизу областей САР є аналогічною до відомої для випадку прямого магнітного поля (див., наприклад, [53, 187]). Ця повільна зміна є наслідком того, що сингулярні доданки, які призводять до особливостей (2.152) для похідного електричного та аксіального магнітного полів хвилі, скорочуються, коли вони беруться в комбінації (2.156).

Перехід від системи рівнянь Максвелла (2.12) - (2.16) до системи (2.153) - (2.156) може видатися занадто складним. Тому наведемо детальніше процедуру переходу, яка умовно складається з семи кроків.

Перший крок. Нехтуємо різницею між абсолютним значенням утримуючого

магнітного поля  $|\vec{B}_0|$  і модулем прямого магнітного поля  $B_0$ ,  $|\vec{B}_0|=B_0(1+O(\varepsilon_m^2))$ . Зокрема, це зауваження застосоване до рівняння системи (2.15).

Другий крок. Нехтуємо надалі доданком у рівнянні (2.15), що є пропорційним до  $B_r$ , тому що він є меншим за порядком величини, ніж доданок, що є пропорційним до  $B_z$  і  $E_g$ . Останні два доданки залишено без змін, тому що їхня комбінація (2.156) змінюється повільно поблизу САР. Щоб переконатися в цьому, можна розглянути рівняння (2.14) і (2.16). Виділяємо доданки, пропорційні Фур'є множникам  $\exp[i(k_z+k_m)z]$  в цих рівняннях:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\omega} \frac{d}{dr} B_z^{(+1)} = \varepsilon_2^{(0)} E_r^{(+1)} + i[(N_z + N_b) B_r^{(+1)} + \varepsilon_l^{(0)} E_g^{(+1)}] \\ + \{0.5 \varepsilon_2^{(1)} (E_r^{(0)} + E_r^{(+2)}) + 0.5 i \varepsilon_l^{(1)} (E_g^{(0)} + E_g^{(+2)})\}, \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$id(r E_g^{(+1)})/dr = -m E_r^{(+1)} - [\omega r B_z^{(+1)}/c]. \quad (2.158)$$

Нехтуємо доданками у фігурних дужках у рівнянні (2.157) як малими величинами порядку  $\varepsilon_m^{4/3}/(a^* k_m)^{1/3}$ . Доданок у лівій частині рівняння і перший доданок у правій частині (2.157) і (2.158) є найбільш сингулярними, а саме: вони є пропорційними до  $(\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2)^{-1}$ . Доданки, що показані в рівняннях (2.157) і (2.158) у квадратних дужках, є менш сингулярними: вони пропорційні до  $\ln|\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2|$ . Після інтегрування цих рівнянь за радіальною координатою множимо рівняння (2.158) на  $\varepsilon_2^{(0)}/r$ , а рівняння (2.157) на  $m/r$ . Потім додаємо їх і одержуємо комбінацію  $i \varepsilon_2^{(0)} E_g^{(+1)} + c m B_z^{(+1)}/(r \omega)$  в лівій частині. Найбільш небезпечні доданки в правій частині рівняння, що пропорційні  $E_r^{(+1)}$ , скорочуються. Доданки наступного порядку малості в правій частині рівняння не викликають швидкої зміни цієї комбінації.

Третій крок. Підставляємо поле  $B_g$  з рівняння (2.13) до рівняння (2.15),

$$\begin{aligned} i \varepsilon_2 E_g + N_g B_z = (1 + \varepsilon_m \cos(k_m z)) \left( -\varepsilon_l E_r - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} \right) \\ + \left\{ (1 + \varepsilon_m \cos(k_m z)) (-1) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \left[ \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \frac{\sin(k_b z)}{1 + \varepsilon_m \cos(k_b z)} E_r \right] \right\} \quad (2.159) \\ - \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \sin(k_m z) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} E_r - \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \sin(k_b z) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \frac{\sin(k_b z)}{1 + \varepsilon_m \cos(k_b z)} E_r \right]. \end{aligned}$$

де  $N_g = cm/(\omega r_s^{(\pm)})$  - азимутальний показник заломлення.

Четвертий крок. Використання методу "вузького шару" дозволяє розглядати рівняння (2.159) як рівняння з постійними коефіцієнтами. Обчислюємо також частинну похідну  $\partial/\partial z$  в доданку, позначеному фігурними дужками в правій частині рівняння (2.159),

$$\begin{aligned}
 i\varepsilon_2 E_g + N_g B_z = & -(1 + \varepsilon_m \cos(k_m z)) \left( \varepsilon_l E_r + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} \right) \\
 & - (0.5 \varepsilon_m + \cos(k_m z) - 0.5 \varepsilon_m \cos(2k_m z)) \frac{c^2}{\omega^2} \varepsilon'_m \frac{\partial E_r}{\partial r} - 2 \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \sin(k_m z) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} E_r \\
 & - \frac{\varepsilon_m'^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} (0.5 - 0.25 \varepsilon_m \cos(k_m z) - 0.5 \cos(2k_m z)) \frac{\partial^2}{\partial r^2} E_r. \quad (2.160)
 \end{aligned}$$

П'ятий крок. Виділяємо в рівнянні (2.160) доданки, що є пропорційними до  $\exp\{i[k_z z + m\vartheta - \omega t]\}$ ,

$$\begin{aligned}
 i\varepsilon_2^{(0)} E_g^{(0)} + N_g B_z^{(0)} = & -\varepsilon_l^{(0)} E_r^{(0)} + N_z^2 E_r^{(0)} - 0.5 \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(+1)} \\
 & - 0.5 \varepsilon_m \varepsilon_l^{(0)} E_r^{(+1)} - 0.5 \varepsilon_m \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(0)} + 0.5 \varepsilon_m (N_z + N_b)^2 E_r^{(+1)} \quad (2.161) \\
 & - 0.5 \varepsilon_m \varepsilon'_m \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial r} - 0.5 \varepsilon'_m \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(+1)}}{\partial r} + 0.25 \varepsilon_m \varepsilon'_m \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(+2)}}{\partial r} \\
 & + \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \frac{c^2}{\omega^2} (k_z + k_b) \frac{\partial E_r^{(+1)}}{\partial r} - 0.5 \frac{\varepsilon_m'^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(0)}}{\partial r^2} \\
 & + 0.125 \varepsilon_m \frac{\varepsilon_m'^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(+1)}}{\partial r^2} + 0.25 \frac{\varepsilon_m'^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(+2)}}{\partial r^2}.
 \end{aligned}$$

Два нижніх індекси присвоєні кожному доданку в рівнянні (2.161). Перший нижній індекс указує на порядок доданка щодо малого параметра  $\varepsilon_m$ . Другий нижній індекс указує на ступінь сингулярності доданка поблизу САР. Пояснимо процедуру присвоєння індексів на прикладі доданків, виділених жирним шрифтом у рівнянні (2.161). Перший доданок  $-0.5 \frac{\varepsilon_m'^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(0)}}{\partial r^2}$  пропорційний  $\varepsilon_m'^2$ , тому йому присвоєний перший нижній індекс "2". Як буде показано нижче, сателітні гармоніки слабо впливають на радіальну залежність поля  $E_r^{(0)}$ , тому другий ниж-

ній індекс "0" приписаний цьому доданку. Множник  $\varepsilon_m'^2$  вносить дві одиниці до першого індексу доданка  $0.25 \frac{\varepsilon_m'^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(+2)}}{\partial r^2} (4,-4)$ . Ще дві одиниці походять від того, що цей доданок містить другу сателітну гармоніку  $E_r^{(+2)}$  радіального електричного поля. Поле  $E_r^{(+1)}$  розходиться (див. (2.152)) як  $(\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2)^{-1}$ . Тоді поле  $E_r^{(+2)}$  розходиться (див. (2.155)) як  $(\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2)^{-2}$  і його друга похідна  $\partial^2 E_r^{(+2)} / \partial r^2$  пропорційна  $(\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2)^{-4}$ . Саме тому присвоюємо другий нижній індекс "- 4" цьому доданку в рівнянні (2.161).

Поряд з доданками нульового порядку за  $\varepsilon_m$  в рівнянні (2.161), що не розходяться (їхні нижні індекси - (0,0)), залишаємо в (2.153) також найбільш небезпечні доданки (з індексами (2,-2) і (4,-4)) в той час, як, наприклад, доданком з індексами (4,-3) нехтуємо. Доданок (4,-4) утримуємо, бо він хоча і менший (на два порядки), але ж він відповідно більш сингулярний (на два порядки). Навпроти, доданок (4,-3) має той самий порядок малості за  $\varepsilon_m$ , що і доданок з індексами (4,-4), але він є менш сингулярним і отже ним можна знехтувати. Нарешті, правило відбору можна сформулювати в такий спосіб: доданком з індексами (i,j) нехтуємо порівняно з доданком з індексами (k,l), якщо  $i+2j/3 > k+2l/3$ . Походження множника  $2/3$  при j та l пояснюється залежністю радіального короткохвильового числа  $k_s \sim \partial/\partial r \propto \varepsilon_m^{-2/3}$ , яку здобудемо у цьому підрозділі. Наприклад, доданком

$$0.125 \varepsilon_m \frac{\varepsilon_m'^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(+1)}}{\partial r^2} (4,-3) \text{ нехтуємо з точністю } (\varepsilon_m^2 a^* k_m)^{1/3} \ll 1.$$

Шостий крок. Виділяємо доданки  $\propto \exp\{i[(k_z + 2k_m)z + m\vartheta - \omega t]\}$  в рівнянні (2.160),

$$\begin{aligned} i\varepsilon_2^{(0)} E_g^{(\square+2)} (2,0) + N_g B_z^{(+2)} (2,0) = & -\varepsilon_l^{(0)} E_r^{(+2)} (2,-2) + (N_z + 2N_b)^2 E_r^{(+2)} (2,-2) \\ & -0.5\varepsilon_l^{(1)} E_r^{(+1)} (2,-1) - 0.5\varepsilon_m \varepsilon_l^{(0)} E_r^{(+1)} (2,-1) - 0.5\varepsilon_m \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(+2)} (4,-2) - 0.5\varepsilon_m \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(0)} (2,0) \\ & + 0.5\varepsilon_m (N_z + N_b)^2 E_r^{(+1)} (2,-1) - 0.5\varepsilon_m \varepsilon_m' \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(+2)}}{\partial r} (4,-3) \\ & - 0.5\varepsilon_m' \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(+1)}}{\partial r} (2,-2) + 0.25\varepsilon_m \varepsilon_m' \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial r} (2,0) \end{aligned} \quad (2.162)$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon'_m}{k_m} \frac{c^2}{\omega^2} (k_z + k_m) \frac{\partial E_r^{(+1)}}{\partial r} \quad (2,-2) \quad -0.25 \frac{\varepsilon'_m{}^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(0)}}{\partial r^2} \quad (2,0) \\
& +0.125 \varepsilon_m \frac{\varepsilon'_m{}^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(+1)}}{\partial r^2} \quad (4,-3) \quad -0.5 \frac{\varepsilon'_m{}^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(+2)}}{\partial r^2} \quad (4,-4) .
\end{aligned}$$

Залишаємо нижче тільки найбільш небезпечні доданки в рівнянні (2.162) з індексами (2, -2),

$$\begin{aligned}
0 = & -\varepsilon_l^{(0)} E_r^{(+2)} \quad (2,-2) + (N_z + 2N_b)^2 E_r^{(+2)} \quad (2,-2) \\
& -0.5 \varepsilon'_m \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(+1)}}{\partial r} \quad (2,-2) \quad - \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \frac{c^2}{\omega^2} (k_z + k_m) \frac{\partial E_r^{(+1)}}{\partial r} \quad (2,-2) . \quad (2.163)
\end{aligned}$$

Доданками з індексами (4, -4) нехтуємо з точністю  $(\varepsilon_m/(a^* k_m))^{2/3} \ll 1$ . Беручи до уваги тотожність

$$\frac{1}{2} + \frac{k_z + k_m}{k_m} = \frac{2k_z + 3k_m}{2k_m}, \quad (2.164)$$

і рівність

$$(N_z + 2N_b)^2 - \varepsilon_l^{(0)} (r_s^{(+)}) \approx (2N_z + 3N_b) N_b, \quad (2.165)$$

- виводимо рівняння (2.155) з рівняння (2.163).

Сьомий крок. Виділяємо доданки  $\propto \exp\{i[(k_z + k_m)z + m\vartheta - \omega t]\}$  в рівнянні (2.160),

$$\begin{aligned}
& i\varepsilon_2^{(0)} E_g^{(\square+1)} \quad (\square,0) + N_g B_z^{(+1)} \quad (1,0) = -\varepsilon_l^{(0)} E_r^{(+1)} \quad (1,-1) - 0.5 \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(0)} \quad (1,0) - 0.5 \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(+2)} \quad (3,-2) \\
& + (N_z + N_b)^2 E_r^{(+1)} \quad (1,-1) - 0.5 \varepsilon_m \varepsilon_l^{(0)} E_r^{(0)} \quad (1,0) - 0.5 \varepsilon_m \varepsilon_l^{(0)} E_r^{(+2)} \quad (3,-2) \\
& - 0.5 \varepsilon_m \varepsilon_l^{(1)} E_r^{(+1)} \quad (3,-1) + 0.5 \varepsilon_m N_z^2 E_r^{(0)} \quad (1,0) + 0.5 \varepsilon_m (N_z + 2N_b)^2 E_r^{(+2)} \quad (3,-1) \\
& - 0.5 \varepsilon_m \varepsilon'_m \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(+1)}}{\partial r} \quad (3,-2) \quad - 0.5 \varepsilon'_m \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial r} \quad (1,0) + \\
& - 0.5 \varepsilon'_m \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial E_r^{(+2)}}{\partial r} \quad (3,-3) \quad - \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \frac{c^2}{\omega^2} k_z \frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial r} \quad (1,0) \\
& + \frac{\varepsilon'_m}{k_m} \frac{c^2}{\omega^2} (k_z + 2k_m) \frac{\partial E_r^{(+2)}}{\partial r} \quad (3,-3) \quad - 0.5 \frac{\varepsilon'_m{}^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_r^{(+1)}}{\partial r^2} \quad (3,-3) \\
& + 0.125 \varepsilon_m \frac{\varepsilon'_m{}^2}{k_m^2} \frac{c^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2 E_r^{(0)}}{\partial r^2} \quad (3,0) + \frac{\partial^2 E_r^{(+2)}}{\partial r^2} \quad (5,-3) \right). \quad (2.166)
\end{aligned}$$

Залишаємо доданки з індексами (1,-1) і (3,-3) і два доданки в лівій частині рівняння, що утворять комбінацію (2.156), щоб одержати необхідне рівняння (2.154). Наприклад, доданком із індексами (3,-2) нехтуємо з точністю  $(\varepsilon_m^2 a^* k_m)^{1/3} \ll 1$ .

Розв'яжемо рівняння (2.153) - (2.155) у випадку, коли структура САР визначається саме періодичною аксіальною неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , а не іншими слабкими ефектами. Іншими словами, в цьому розв'язку знехтуємо зіткненнями між частинками плазми, інерцією електронів і скінченням ларморівським радіусом іонів. Радіальний профіль густини плазми вважаємо лінійним поблизу САР,

$$\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2 = (d\varepsilon_l^{(0)}/dr) \Big|_{r_s^{(+)}} (r - r_s^{(+)}). \quad (2.167)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння Ейрі (2.154), амплітуда якого зменшується при віддаленні від САР і виносить енергію з САР, має наступний вигляд,

$$E_r^{(+l)} = -ik_s a^* (N_z + N_b)^{-2} A^{(+)} v(k_s (r - r_s^{(+)})), \quad (2.168)$$

тут

$$v(\xi) = s \int_0^\infty \exp[is(t\xi + t^3/3)] dt, \quad k_s = ((-1/\lambda) d\varepsilon_l^{(0)}/dr)^{1/3} \Big|_{r_s^{(+)}} = |k_s| e^{i\varphi}. \quad (2.169)$$

Напрямок поширення дрібномасштабної хвилі визначається параметром  $s$ ,

$$s = \text{sign}[d\varepsilon_l^{(0)}/dr] \Big|_{r_s^{(+)}} \text{Re}(k_s). \quad (2.170)$$

Як було відзначено в [46], абсолютне значення неоднорідної функції Ейрі  $v(\xi)$  має максимум не в нулі, а у  $\xi_m \approx -1.8$ .

Характерну ширину  $\delta r$  області САР (2.71) можна оцінити з (2.169) у такий спосіб:

$$\delta r = (\varepsilon_l^{(0)}/(a^* \lambda))^{-1/3} \sim a^* (\varepsilon_m/(k_m a^*))^{2/3} \ll a^*. \quad (2.171)$$

Виконання нерівностей (2.171) підтверджує, зокрема, можливість застосовувати метод "вузького шару" (див. нерівності (2.110)). З аналізу рівняння (2.171) можна легко одержати, що ширина  $\delta r$  області САР ширша за область основного АР за інших рівних умов.

Характерне значення амплітуд  $E_r^{(\pm l)}$  сателітних гармонік радіального електричного поля хвилі в області САР можна оцінити на основі (2.154) і (2.171) за по-

рядком величини в такий спосіб,

$$E_r^{(\pm 1)} \sim A^{(\pm)} (k_m a^*)^{2/3} / [(N_z + N_b)^2 \varepsilon_m^{2/3}]. \quad (2.172)$$

Оцінка (2.172) показує, що амплітуди сателітних гармонік менші, ніж амплітуда основної гармоніки, навіть у межах САР і тільки слабо впливають на поведінку останньої в цій області. Радіальну залежність  $E_r^{(0)}(r)$  можна визначати при нехтуванні амплітудами  $E_r^{(\pm 1, \pm 2)}$  сателітних гармонік навіть поблизу САР, тому що права частина рівняння (2.153) дорівнює за порядком величини  $(\varepsilon_m / (k_m a^*))^{2/3} N_z^2 E_r^{(0)}$ . Цю обставину використано вище, при поясненні п'ятого кроку переходу від системи рівнянь (2.12) – (2.16) до (2.153) – (2.155).

Відомо, що амплітуда  $E_r^{(+2)}$  другої сателітної гармоніки є малою величиною другого порядку поза областю САР,  $E_r^{(+2)} \sim \varepsilon_m E_r^{(+1)} \sim \varepsilon_m^2 E_r^{(0)}$  [32]. При наближенні до області САР амплітуда  $E_r^{(+2)}$  зростає ще більш різко, ніж  $E_r^{(+1)}$ , а саме,  $E_r^{(+2)} \propto [\varepsilon_l^{(0)} - (N_z + N_b)^2]^{-2}$ . Це призводить до обмеження росту амплітуди першої гармоніки. Амплітуди сателітних гармонік більші в межах області САР, ніж поза цією областю, за порядком величини  $E_r^{(+2)} \sim \varepsilon_m^{1/3} E_r^{(+1)} \sim \varepsilon_m^{2/3} E_r^{(0)}$ , але вони залишаються, проте, меншими від амплітуди основної гармоніки. Значення цього результату обумовлено також наступною обставиною. До виконання цього детального аналізу було природно припускати, що в області САР амплітуда  $E_r^{(+1)}$  сателітної гармоніки може бути більшою, ніж амплітуда  $E_r^{(0)}$  основної гармоніки. Тоді можна було б очікувати, що в САР почне відігравати роль нелінійність за амплітудою хвилі і/або відбудеться турбулентне поглинання ВЧ потужності сателітної гармоніки за умови лінійного (за амплітудою хвилі) поширення основної гармоніки. Однак, результати детального дослідження показали, що навіть в області САР амплітуда  $E_r^{(+1)}$  сателітної гармоніки залишається меншою, ніж амплітуда  $E_r^{(0)}$  основної гармоніки, тобто дане дослідження підтверджує неможливість згаданих явищ.

Можна показати, що амплітуда  $E_g^{(+1)}(r)$  першої сателітної гармоніки азимутального електричного поля має логарифмічну особливість (2.152) при наближенні до САР,  $|r - r_s^{(\pm)}| > k_s^{-1}$ . Ця особливість є найслабшою, саме тому порядок величини  $E_g^{(+1)}$  залишається тим же самим в області САР, що і поза ним,  $E_g^{(+1)} \sim \varepsilon_m E_g^{(0)}$ .

Така радіальна залежність  $E_g^{(+l)}(r)$  подібна до залежності  $E_g^{(0)}(r)$  усередині основного АР.

Щоб проілюструвати отримані аналітичні результати, замінімо рівняння (2.154) наступним еквівалентним рівнянням:

$$\varepsilon_m^2 y^{(l)''} - xy^{(l)} = \varepsilon_m. \quad (2.173)$$

Розподіл  $y^{(l)}(x)$  амплітуди сателітної гармоніки поблизу САР показано на рис. 2.3. Значення малого параметра обрано при цьому  $\varepsilon_m = 0.1$ . При аналізі кривої залежності  $y^{(l)}(x)$  на рис. 2.3 скористаємося оцінками (2.171) і (2.172). Характерне значення функції  $y^{(l)}$  можна оцінити на основі (2.172). Воно дорівнює за порядком величини  $y^{(l)} \sim 0.1^{1/3} = 0.464$ . Характерну ширину резонансу  $\delta x$  на рис. 2.3 визначено виразом (2.171). Її значення дорівнює,  $\delta x \sim 0.1^{2/3} = 0.215$ . Ці оцінки добре узгоджуються з поведінкою кривої, наведеної на рис. 2.3.

Знайдемо умови, за яких структура сателітного локального АР визначається

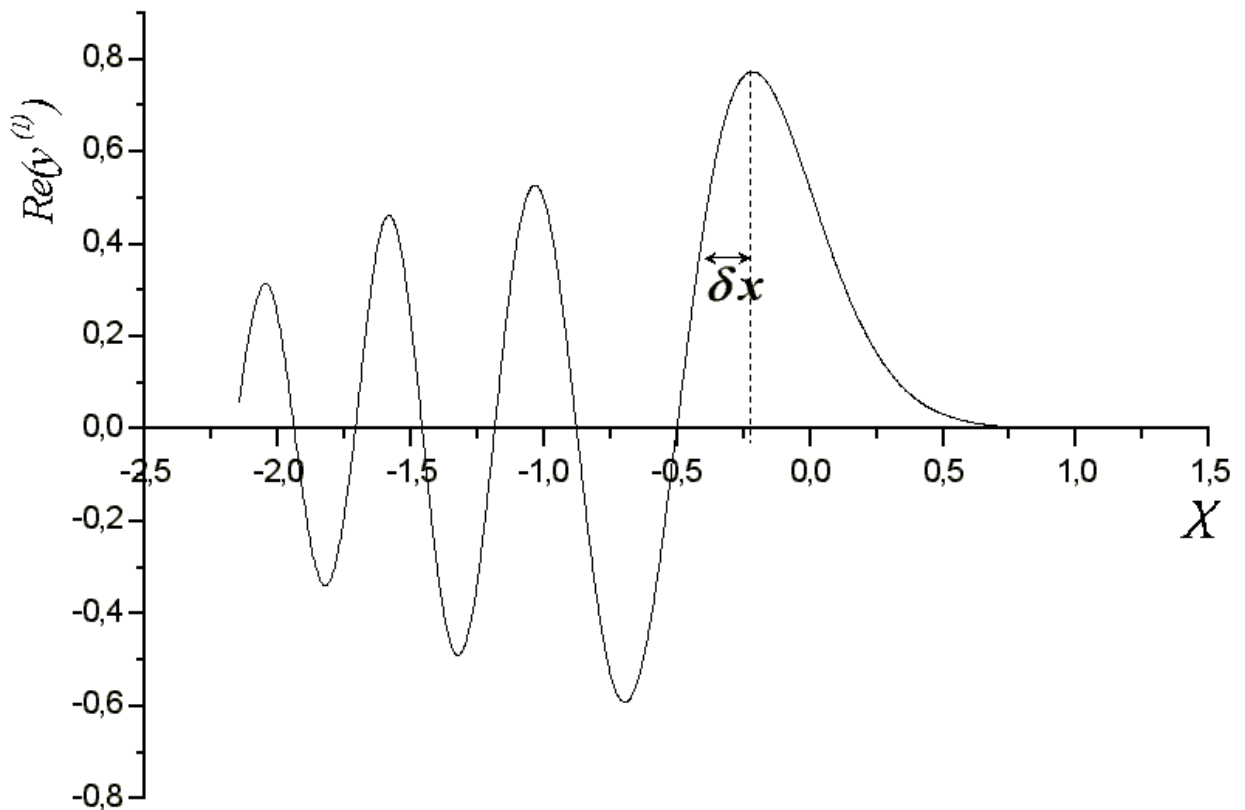


Рис. 2.3 Моделювання радіальної залежності амплітуди  $E_r^{(+l)}(r)$  першої сателітної гармоніки поблизу САР завдяки розв'язанню рівняння (2.173).

саме слабкою періодичною аксіальною неоднорідністю  $\vec{B}_0$ , а не інерцією електронів, іонним ларморівським радіусом чи зіткненнями частинок. Урахування цих слабких ефектів може бути легко виконано за допомогою наступної заміни в рівнянні (2.154):

$$\varepsilon_I^{(0)} - (N_z + N_b)^2 \rightarrow \varepsilon_I^{(0)} - (N_z + N_b)^2 + \sigma. \quad (2.174)$$

Доданок  $\sigma$  в (2.174) визначається наступним виразом,

$$\sigma = i\varepsilon_I^{(c)} + (\varepsilon_T + c^2 (N_z + N_b)^2 / (\omega^2 \varepsilon_3)) (d^2/dr^2). \quad (2.175)$$

Інерція електронів, іонний ларморівський радіус і зіткнення частинок враховані в рівнянні (2.174) через доданок  $\sigma$  аналогічно випадку прямого магнітного поля, як це виконано в [53, 186, 187]. Відповідно до методу "вузького шару", тут використано значення величин  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon_3$  і  $\varepsilon_I^{(c)}$  у точці САР. Тут доданок  $(i\varepsilon_I^{(c)})$  наведений в підрозділі 1.3 формулою (1.124) якраз і враховує зіткнення між частинками плазми [184]. Коефіцієнт  $\varepsilon_T$  у заміні (2.175) також виписаний у підрозділі 1.3 (див. формулу (1.126)), він враховує скінченний іонний ларморівський радіус [185]. Інерція електронів також врахована в (2.175) через компоненту  $\varepsilon_3$  тензора діелектричної проникливості, для якої можна скористатись наведеними в підрозділі 1.3 визначеннями (1.127) – (1.130) із заміною  $k_s \rightarrow k_m$ .

Вплив слабкої періодичної аксіальної неоднорідності  $\vec{B}_0$  на структуру САР є більш істотним, ніж вплив скінченного іонного ларморівського радіуса й інерції електронів, якщо справедлива наступна нерівність,

$$\varepsilon_m^2 \gg (k_m a^*)^2 (\rho_{Li}/r_s^{(\pm)})^2 ((N_z \pm N_b)/N_b). \quad (2.176)$$

Ця умова може бути виконана в периферійній плазмі, де періодична аксіальна неоднорідність  $\vec{B}_0$  найбільш істотна, і плазма є холоднішою, ніж у глибині. Нерівність (2.176) може бути задоволена навіть для трохи вищої іонної температури, ніж подібна умова (2.124), що стосується випадку основного АР. Оцінимо значення малого параметра  $\varepsilon_m$ , при якому неможливо знехтувати впливом періодичної аксіальної неоднорідності магнітного поля при вивченні конверсії ВЧ хвиль в області САР в уловлювачах з параметрами, типовими для запланованих умов Helias реактора [31] ( $\rho_{Li}/a^* = 1/30$ ,  $a^*/R = 0.1$ , тут  $R$  – великий радіус плазми,  $\varepsilon_m \sim 0.13$ ,  $N=4$ ).

Нерівність (2.176) набуває при цьому вигляду,  $k_z R \ll 380$ . Таким чином, умова (2.176) є цілком здійсненою для такого типу реакторів.

Умову (2.176) можна інтерпретувати в такий спосіб. Радіальне відхилення  $r - r_s^{(\pm)}$  магнітної поверхні (2.5) від циліндра із середнім радіусом  $r_s^{(\pm)}$  є більшим за характерну ширину  $\Delta r_T$  області САР, що відома для випадку прямого магнітного поля.

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі аналітично вивчено вплив помірної періодичної аксіальної неоднорідності утримуючого гофрованого магнітного поля  $\vec{B}_0$  на розподіл ВЧ полів в області сателітного альфвенівського резонансу в радіально неоднорідній плазмі.

Періодична аксіальна неоднорідність утримуючого гофрованого магнітного поля обумовлює зв'язок окремих просторових гармонік електромагнітного поля. Амплітуда другої сателітної гармоніки є нехтовно малою поза областю САР для першої сателітної гармоніки, але вона зростає при наближенні в радіальному напрямку до області САР навіть стрімкіше за амплітуду першої сателітної гармоніки. Саме це зростання усуває нескінченний розрив електромагнітних полів першої сателітної гармоніки, що має місце за умови нехтування зіткненнями між частинками плазми, інерцією електронів і тепловим рухом іонів.

Визначено умову (2.176), за якої модуляція радіальної складової утримуючого магнітного поля впливає на структуру АР сильніше, ніж зіткнення частинок плазми, скінченний іонний ларморівський радіус і інерція електронів. Умова (2.176) може бути виконана в периферійній плазмі великих термоядерних пристроїв, де відхилення магнітних поверхонь від круглого циліндра є більшим і плазма є холоднішою, ніж у центрі. Відомо, що саме туди область локального АР пересувається під час зростання густини плазми, що має місце при створенні плазми в термоядерних пристроях. Зокрема, нерівність (2.176) виконується для запланованих параметрів Helias реактора [31]. За інших рівних умов, модуляція  $\vec{B}_0$  може бути трохи слабшою в межах області САР, щоб задовольнити нерівності (2.176) порівняно до модуляції  $\vec{B}_0$  в області основного АР, яка є необхідною для задово-

лення нерівності (2.124).

За результатами дослідження дістаємо висновок, що характерне значення (2.172) радіального електричного поля електромагнітної хвилі є меншим, ніж у випадку прямого магнітного поля за умови (2.176).

Характерна ширина області альфвенівського резонансу більша за умови (2.176), ніж у прямому магнітному полі, при фіксованих інших параметрах. Радіальний розподіл ВЧ полів поблизу АР дуже важко визначити експериментально, тому що ці області є дуже вузькими. З цієї точки зору можна було б рекомендувати САР для експериментального вивчення, тому що він є ширшим (див. (2.171)) за основний АР (див. (2.117)). Однак, слід пам'ятати, що характерне значення амплітуди сателітної гармоніки ВЧ поля виявляється меншим від основної гармоніки навіть у межах області САР.

Оскільки тонку структуру САР (2.71) вивчено в підрозділі 2.2 для випадку дуже слабо модульованого магнітного поля (коли справедлива нерівність, протилежна (2.176)), то дане дослідження узагальнює аналіз підрозділу 2.2 на випадок, у якому вплив гофрування є порівнянним чи навіть більш сильним, ніж вплив скінченного іонного ларморівського радіуса та інерції електронів.

Періодична неоднорідність саме радіального компонента  $B_{0r}$  утримуючого магнітного поля (а не слабка аксіальна періодична неоднорідність аксіальної складової  $B_{0z}$ ) впливає на розподіл ВЧ полів у межах АР. Ця обставина зв'язана з тим, що саме радіальний показник заломлення є розривним у межах САР у підході холодної гідродинаміки.

Відзначимо, що форма (2.1) утримуючого магнітного поля, що містить тільки одну гармоніку  $\propto \sin(k_m z)$ , є сильно спрощеною. Фактично спектр утримуючого магнітного поля є досить широким і містить також гармоніки  $\propto \sin(jk_m z)$ ,  $j=2,3,4\dots$  Урахування інших гармонік  $\vec{B}_0$ , що є пропорційними  $\sin(jk_m z)$ , викликає виникнення наступних САР, у яких  $\varepsilon_l^{(0)} = (N_z \pm jN_b)^2$ . Тут не проведено аналіз цих САР, тому що він не містить нічого якісно нового в порівнянні з вивченим у даному підрозділі.

## 2.6. Висновки до другого розділу

У другому розділі досліджено вплив гофрування утримуючого магнітного поля  $\vec{B}_0$ , а отже, і відповідної аксіальної періодичної неоднорідності плазми, властивої для пасток керованого термоядерного синтезу, на поширення, конверсію і поглинання альфвенівських та швидких магнітозвукових хвиль. Показано, що гофрування спричиняє зачеплення окремих просторових гармонік електромагнітних хвиль, внаслідок чого хвилі поширюються у вигляді хвильових пакетів.

Встановлено, що у випадку, коли аксіальна довжина основної гармоніки електромагнітної хвилі вдвічі перевищує період гофрування, аксіальна періодична неоднорідність  $\vec{B}_0$  спричиняє розщеплення спектрів МГД коливань плазми. При цьому в хвильовому пакеті поряд з двома основними гармоніками, які характеризуються протилежними значеннями аксіального хвильового числа, враховано також дві сателітні гармоніки, чії амплітуди визначено як малі величини першого порядку. Поправку до власної частоти МГД хвиль, яку обумовлено гофруванням, пораховано як малу величину першого порядку малості.

Показано можливість додаткового нагрівання плазми в гофрованому магнітному полі поблизу сателітних альфвенівських резонансів. Просторовий розподіл полів електромагнітних хвиль поблизу САР визначено як для випадку слабого гофрування, коли цей розподіл визначається інерцією електронів і тепловим рухом іонів, так і для випадку помірного гофрування, коли цей розподіл визначається саме аксіальною періодичною неоднорідністю плазми. Розраховано високочастотну потужність, яка поглинається плазмою поблизу САР. Встановлено умови, за яких це додаткове нагрівання плазми може бути істотним.

Встановлено, що гофрування  $\vec{B}_0$  усуває розрив розв'язків рівнянь Максвелла для електромагнітних полів, який має місце у разі нехтування тепловим рухом частинок плазми, зіткненнями, інерцією електронів, слабкою



нелінійністю, тощо поблизу локального альфвенівського резонансу. Розраховано просторовий розподіл електромагнітних полів поблизу АР, а також ВЧ потужність, яка поглинається плазмою поблизу АР. Дослідження виконано також і для випадку, коли дві основні гармоніки, які зв'язані у хвильовому пакеті гофруванням, мають свої АР в одному місці.

## РОЗДІЛ 3

ПОШИРЕННЯ, КОНВЕРСІЯ І ПОГЛИНАННЯ АЛЬФВЕНІВСЬКИХ ХВИЛЬ У  
ПЛАЗМОВОМУ ШНУРІ З НЕМОНОТОННИМ ПРОФІЛЕМ ГУСТИНИ

Однією з задач, що пов'язані із дослідженням властивостей термоядерної плазми в тороїдних магнітних пастках (токамаках та стеллараторах), є створення плазми з належно високими значеннями густини  $n_e$  та температури  $T_e$ . Величини параметрів, що є характерними для термоядерного реактора, який базується на цих пастках, а саме, густини і температури, сягають наступних значень:  $n_e \sim 10^{13} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e \sim 1 \div 20 \text{ КеВ}$ . Досягнення таких значень параметрів плазми здійснюється за допомогою інжекції швидких нейтральних частинок, іонного та електронного циклотронних резонансів, іон - іонного гібридного резонансу та альфвенівського резонансу (АР). АР ефективно використовується для створення плазми та її нагрівання на стеллараторах "Ураган" в ННЦ ХФТІ. Механізми поглинання хвиль та нагрівання плазми при альфвенівському нагріванні полягають в наступному. Високочастотне електромагнітне поле збуджується зовнішньою антеною, яку розташовано поза плазмовим шнуром біля поверхні металевої камери. На периферії плазми хвиля спочатку проходить крізь бар'єр непрозорості. Тоді вона потрапляє до внутрішньої області, де вона може розповсюджуватись у вигляді альфвенівської хвилі (АХ). Далі поблизу так званого локального АР електромагнітна хвиля трансформується на дрібномасштабну, майже потенціальну моду (кінетичну АХ). Ця хвиля може ефективно поглинатись електронами, якщо параметр  $z_e \equiv \omega / (\sqrt{2} k_{\parallel} v_{Te})$  не є занадто великим, тут  $k_{\parallel}$  - складова хвильового вектора вздовж напрямку зовнішнього магнітного поля  $\vec{B}_0$ ,  $v_{Te}$  - теплова швидкість електронів. Якщо  $z_e \sim l$ , то ширина  $l$  області конверсії того ж порядку, що і довжина загасання  $\lambda_{local}$ . У випадку лінійного профілю густини ширину області конверсії можна оцінити за порядком величини,  $l \sim \lambda_{local}^{(1)} \sim (\rho_{Li}^2 a^*)^{1/3}$ , де  $a^*$  - характерна відстань, на якій змінюється густина плазми.

Недоліком альфвенівського метода нагрівання є поверхневе виділення ВЧ

потужності, бо при зростанні густини та розмірів плазмового шнура області AP пересуваються на периферію. В цьому випадку вкладання ВЧ потужності до плазми відбувається неефективно: теплові потоки внаслідок теплопровідності пропорційні до  $1/\Delta r$ , де  $\Delta r = r_A - a_p$ ,  $a_p$ - радіус плазми. Тому при заданій потужності, що її вкладають в плазму, величина температури, що встановилась, тобто при якій реалізується баланс енергії (потужність, що її вкладають в плазму, дорівнює потужності, що витікає з плазми за рахунок теплопровідності, випромінювання тощо), виявляється меншою, ніж якби область, куди вкладається енергія, знаходилась в глибині плазми. Ці несприятливі умови ускладнюють використання альфвенівського методу нагрівання плазми у великих пастках і ініціюють пошуки нових фізичних механізмів підвищення його ефективності.

Дослідження альфвенівського нагрівання плазми у випадку лінійного радіального профілю густини плазми вказує на можливість підсиленого поглинання високочастотної потужності за наявності на профілі густини точок мінімуму або максимуму. Такі профілі густини експериментально спостерігаються, зокрема, у стеллараторах LHD в Японії, Wendelstein 7-AS в Німеччині та TJ-II в Іспанії. Немонотонність профілю густини може пояснюватись застосуванням електронного циклотронного нагрівання, внаслідок якого розігріті частинки плазми частково полишають центральну частину плазмового шнура. Цим обумовлено інтерес до дослідження поширення, конверсії і поглинання електромагнітних хвиль поблизу точок мінімуму або максимуму на профілі густини за умови, що ці точки співпадають (є близькими) до точок AP.

Пучки швидких іонів, які утворюються внаслідок інжекції нейтральних частинок до токамака – реактора, можуть забезпечувати безіндукційний струм і рівновагу плазми. Але сильно нерівноважний розподіл швидких іонів може призводити до збудження нестійких альфвенівських та швидких магнітозвукових хвиль, якщо густина струму перевищує порогове значення, яке визначається електронним черенковським та іонним циклотронним загасанням хвиль. Розгляд цієї проблеми у спрощеній моделі плазми як порожнистого циліндра для умов токамака ITER показав, що це порогове значення визначається збудженням перших раді-

альних мод. Виявилось, що порогове значення є дуже чутливим до параметрів пучка і хвилі [141, 142]. Розв’язання задачі про збудження МГД хвиль пучком швидких іонів потребує знань про власні частоти таких хвиль у якомога більш реалістичній моделі. На розвиток попередніх робіт [65, 66, 141, 142], в яких ці хвилі досліджувались у моделі аксіального зовнішнього магнітного поля, в цьому розділі модель плазми удосконалено з урахуванням поперечної компоненти утримуючого магнітного поля, яка є характерною для токамаків.

### 3.1. Дрібномасштабні альфвенівські коливання плазми, локалізовані поблизу вершини максимуму (мінімуму) збурення радіального профілю густини скінченної висоти (глибини)

У цьому підрозділі досліджено альфвенівські коливання, локалізовані в області, де радіальний профіль густини плазми досягає екстремуму між двома локальними АР [57, 166, 202, 203]. Власні моди записуються в цьому випадку через гіпергеометричну функцію. Радіальна довжина хвилі виявляється малою, що дає можливість застосовувати метод “вузького шару”. Визначено власну частоту цих коливань. Показано, що кінетичні АХ можуть поширюватися поблизу максимуму, а інерціальні АХ – поблизу мінімуму густини. Розглянуто граничний перехід до збурення густини нескінченно великої глибини.

Значення компоненти тензора діелектричної проникливості холодної плазми  $\varepsilon_l$ , яка входить до умови (1.1) альфвенівського резонансу, залежить від координат через наявність в ній двох фізичних величин: зовнішнього магнітного поля  $B_0(r)$  і густини плазми  $n(r)$ . У цьому підрозділі вважаємо, що тільки густина плазми залежить від радіальної координати. Однак, урахування можливої радіальної неоднорідності зовнішнього магнітного поля не змінює ходу і результатів розв’язання.

Розглядаємо плазмовий циліндр, однорідний в аксіальному й азимутальному напрямках, який поміщено в однорідне аксіальне стале магнітне поле. Радіальний профіль густини моделюємо в такий спосіб (див. рис. 3.1):

$$\varepsilon_l(r) = N_z^2 \left[ 1 + M + A / \cosh^2((r - r_0)/a) \right]. \quad (3.1)$$

Тут  $N_z = ck_z/\omega$  - аксіальний показник заломлення,  $k_z$  - аксіальне хвильове число,  $r$  - радіальна змінна в циліндричній системі координат,  $r_0$  - координата екстремуму густини,  $a$  - характерна ширина області збурення густини;  $MN_z^2$  - відмінність величини  $\varepsilon_l$  від резонансного значення  $N_z^2$ , яку пораховано у віддалі від  $r_0$ ,

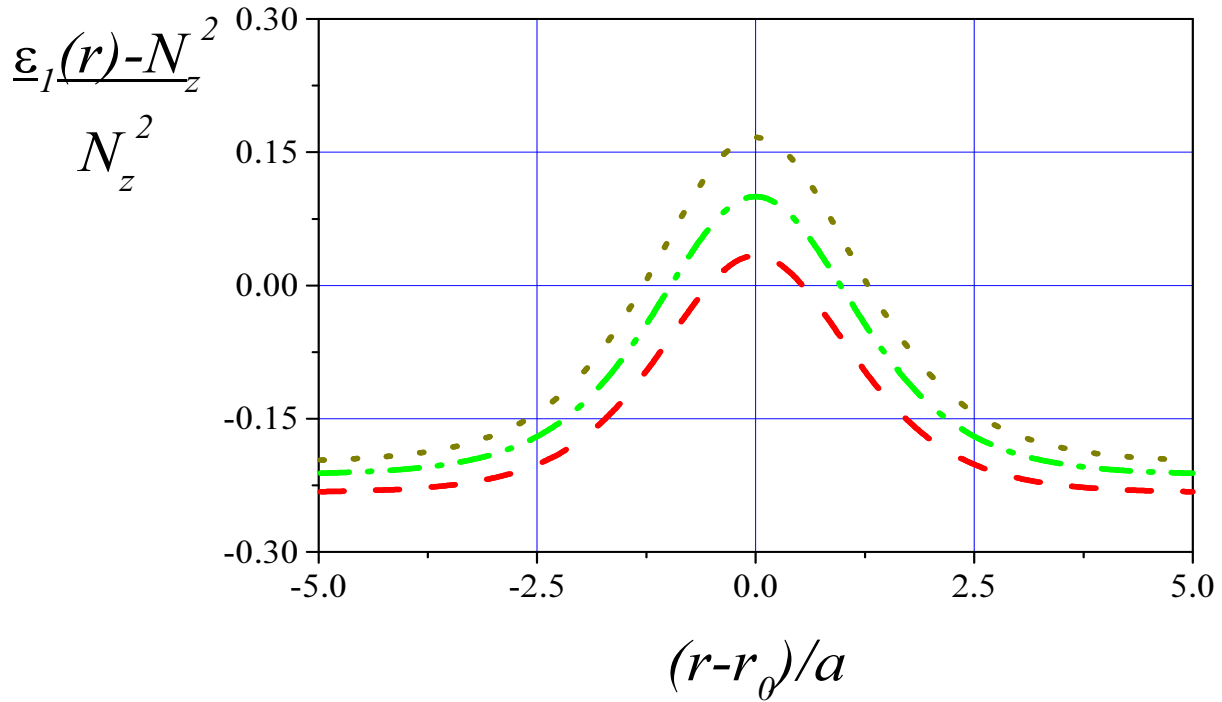


Рис. 3.1 Радіальний профіль величини  $(\varepsilon_l - N_z^2)/N_z^2$  для випадку максимуму на профілі густини. Розрахунок проведений для фіксованих значень  $\delta=10$  і  $\rho/a=0.05$ . Криві, які зображено довгими штрихами, штрих – пунктирною лінією і точками, відповідають власним модам з радіальним номером  $n=0$ ,  $n=1$  та  $n=2$ .

де  $|r - r_0| \gg a$ ;  $AN_z^2$  - амплітуда збурення на профілі  $\varepsilon_l(r)$ . Вважаємо, що величини  $A$  і  $M$  можуть набувати як позитивних, так і негативних значень.

Функція (3.1) є зручною тим, що досить добре апроксимує поведінку густини не тільки поблизу максимуму, але і у віддалі від нього, оскільки доданком з гіперболічним косинусом при віддаленні від  $r_0$  можна знехтувати. При цьому на тлі постійного значення густини плазми поблизу деякої точки  $r_0$  спостерігається аксіально - симетричне збурення заданої ширини  $a$  по радіусу. Знак кожного до-

данка залежить від параметрів плазми. Вважаючи значення густини удалині від точки  $r_0$  (чи параметра  $M$ ) заданим, шукатимемо власні розв'язки рівнянь Максвелла. Виходячи з величини відповідних власних значень, знайдемо значення параметрів плазми поблизу збурення, за яких можуть існувати власні коливання. Визначимо величину збурення густини, за якого можливе існування хвиль. Надалі, за аналогією з квантовою механікою, будемо застосовувати термін «потенціальна яма» для позначення збурення густини.

З рівнянь Максвелла, з урахуванням інерції електронів і скінченного ларморівського радіусу іонів, можна одержати рівняння на радіальний компонент поля хвилі  $E_r$  (див., наприклад, [53, 55, 57]). Припускаючи наступну залежність поля хвилі від координат і часу,  $E_r = E_r(r) \exp[i(k_z z + m \vartheta - \omega t)]$ , здобудемо таке рівняння для амплітуди хвилі  $E_r(r)$ :

$$\left[ \varepsilon_l - N_z^2 + \left( \varepsilon_T + \frac{\varepsilon_l c^2}{\varepsilon_3 \omega^2} \right) \frac{d^2}{dr^2} \right] E_r = -i \varepsilon_2 E_\vartheta - \frac{cm}{\omega r} B_z. \quad (3.2)$$

Тут  $\varepsilon_i$  – компоненти тензора діелектричної проникливості холодної магнітоактивної плазми без зіткнень. Доданок  $\varepsilon_T$  враховує скінченний ларморівський радіус [185], його визначено формулою (1.126) в підрозділі 1.3.

Коефіцієнт при другій похідній у (3.2) дорівнює за порядком величини  $N_z^2 \rho_{L\alpha}^2$ , де  $\rho_{L\alpha} = v_{T\alpha} / \omega_{c\alpha}$  – ларморівський радіус і  $v_{T\alpha}$  – теплова швидкість частинок сорту  $\alpha$ . Наслідуючи методику роботи [53], ми використовуємо наближення «вузького шару», що передбачає повільну зміну параметрів плазми і сильну залежність полів хвилі від радіальної координати в області резонансу. Вважаючи в цьому наближенні величину  $\varepsilon_T$  і частку  $\varepsilon_l / \varepsilon_3$  такими, що повільно змінюються з радіусом, скористаємося позначенням:

$$\varepsilon_T + \frac{\varepsilon_l c^2}{\varepsilon_3 \omega^2} \equiv \pm N_z^2 \rho^2. \quad (3.3)$$

Підкреслимо, що величина  $\rho$  у формулі (3.3) має розмірність довжини, вона нормує коефіцієнт при другій похідній у рівнянні (3.2) і не є ларморівським радіусом іонів, хоча виявляється одного з ним порядку.

Оскільки величина компоненти  $\varepsilon_z$  є негативною, а величина  $\varepsilon_T$  - позитивною в розглянутому інтервалі частот, то коефіцієнт при другій похідній може мати різні знаки. Ця обставина є дуже важливою, оскільки знак коефіцієнта при старшій похідній у рівнянні (3.2) визначає, за яких умов існують власні коливання: у випадку локального максимуму чи мінімуму густини. Якщо плазма є холодною (холодні як іони,  $v_{Ti} \ll \omega / |k_z|$ , так і електрони,  $v_{Te} \ll \omega / |k_z|$ ), тоді коефіцієнт (3.3) є негативним. Фізично це означає, що тепловими швидкостями частинок можна знехтувати, і другий доданок у (3.3), що відповідає за врахування інерції електронів, стає домінуючим. Відповідно до сформованої термінології [12], хвилі в цьому випадку називаються інерціальними. Навпаки, якщо плазма є гарячою (і іони, і електрони), то коефіцієнт (3.3) є позитивним, саме тепловий рух іонів обумовлює основний внесок, і тоді такі хвилі називаються кінетичними.

Хоча й азимутальне електричне поле  $E_\theta$ , і аксіальне магнітне поле  $B_z$  - обидва мають поблизу АР логарифмічну особливість,  $E_\theta, B_z \propto \ln|\varepsilon_I - N_z^2|$ , виявляється, що комбінація  $i\varepsilon_2 E_\theta + (cm/\omega r)B_z$  в правій частині рівняння (3.2) не розходиться. Тому зазвичай (див. [36, 118, 120]) ця комбінація вважається такою, що дорівнює константі, і зв'язується з хвилею накачування. Оскільки досліджуються власні розв'язки рівняння (3.2), локалізовані поблизу  $r=r_0$ , слід покласти цю константу рівною нулю.

Розглянемо окремо випадок гарячої плазми, що відповідає позитивному коефіцієнту перед другою похідною в рівнянні (3.2). Щоб розв'язок був локалізованим, а саме експоненціально загасав при віддаленні від  $r_0$ , величина  $(\varepsilon_I - N_z^2)$  має бути негативною при  $|r-r_0| \gg a$ , що відповідає від'ємному значенню параметра  $M$ :  $M < 0$ . Використовуючи введені раніше позначення, перепишемо рівняння (3.2) у цьому випадку у вигляді:

$$\left[ -M + Ach^{-2} \left( \frac{r-r_0}{a} \right) + \rho^2 \frac{d^2}{dr^2} \right] E_r = 0. \quad (3.4)$$

Як було зазначено раніше,  $A$  може мати різні знаки, але локалізовані власні розв'язки рівняння (3.4) існують лише при  $A > 0$ , що відповідає максимуму на про-

філі густини (рис. 3.1). Такий висновок узгоджується з результатами числового аналізу [204], де був розглянутий випадок гарячих електронів,  $v_{Te} > \omega/|k_z|$ .

Наслідуючи [58], уведемо позначення:

$$\xi = th\left(\frac{r-r_0}{a}\right), \quad M = -\frac{\rho^2}{a^2} \delta^2 \quad \text{і} \quad A = \frac{\rho^2}{a^2} s(s+1). \quad (3.5)$$

Рівняння (3.4) такою заміною зводиться до гіпергеометричного рівняння, розв'язок якого виражається через гіпергеометричну функцію [205]:

$$E_r(r) = ch^{-\delta} \left( \frac{r-r_0}{a} \right) F\left( \delta-s, \delta+s+1, \delta+1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} th\left( \frac{r-r_0}{a} \right) \right). \quad (3.6)$$

Функція (3.6) залишається скінченною при  $r-r_0 \gg a$ , тільки якщо величини  $\delta$  і  $s$  зв'язані співвідношенням  $s = \delta + n$  (число  $n=0, 1, 2, \dots$  відповідає кількості нулів функції  $E_r$ ). Під величиною  $\delta$  розуміємо арифметичний квадратний корінь з  $\delta^2$ . Залежності (3.6) радіального компонента поля  $E_r$  від радіуса для значень  $n=0, 1, 2$  представлені на рис. 3.2.

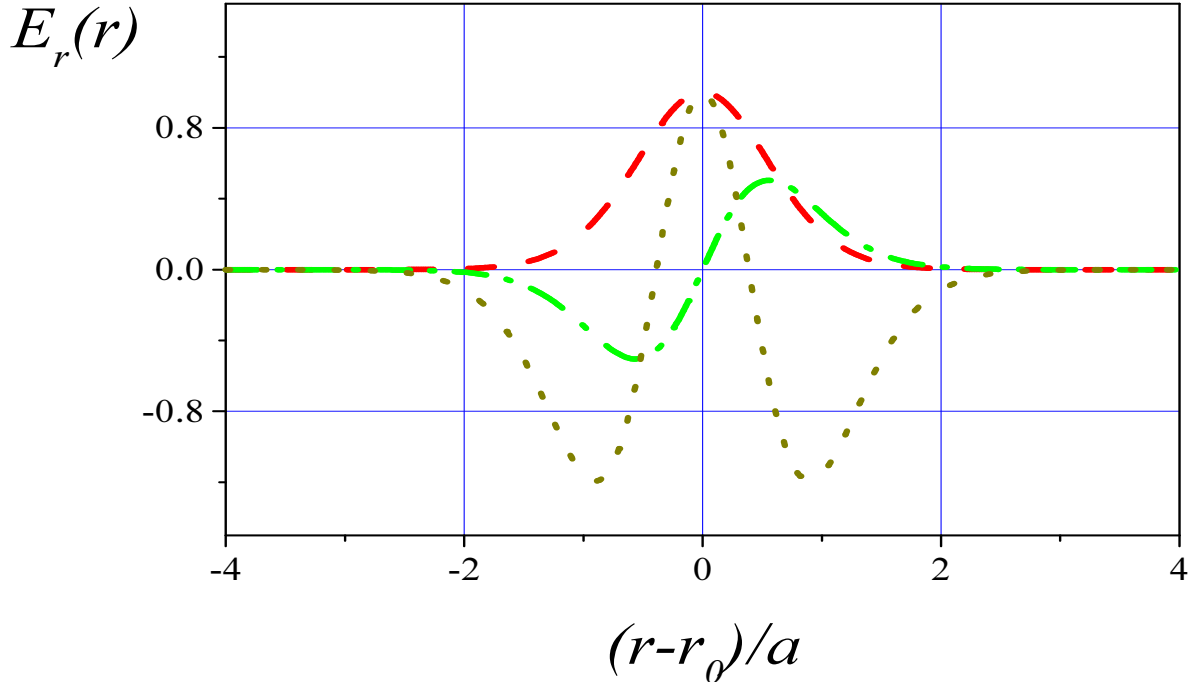


Рис. 3.2 Залежність полів  $E_r$  від радіуса для  $n=0, 1, 2$ . Значення всіх параметрів і позначення обрані такими ж, як на рис. 3.1.



Значення  $\varepsilon_l$  у точці  $r_0$  для різних  $n$  дорівнюють:

$$\varepsilon_l(r_0) = N_z^2 \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{a^2} [\delta(2n+1) + n(n+1)] \right\}. \quad (3.7)$$

Частота, при якій реалізується резонансна умова (1.1), відповідає альфвенівському континууму [12, 40] і дорівнює  $\omega = |k_z|v_A$ . Вважаючи доданок до  $N_z^2$  у правій частині (3.7) малою величиною й утримуючи тільки перший доданок у розкладанні за нею, знаходимо значення частоти власних хвиль для різних  $n$ :

$$\omega_n = |k_z|v_A \left( 1 + \frac{\rho^2}{2a^2} [\delta(2n+1) + n(n+1)] \right). \quad (3.8)$$

Щоб зрозуміти, якого типу хвилям в однорідній плазмі відповідають хвилі, локалізовані між двома АР, розглянемо розв'язок рівняння (3.4) у ВКБ наближенні. Покладемо  $E_r \propto \exp(i \int k_r dr)$ ,  $k_r a \gg 1$ , тоді можна здобути вирази для квадрата радіального коефіцієнта заломлення  $N_r^2 = c^2 k_r^2 / \omega^2$ :

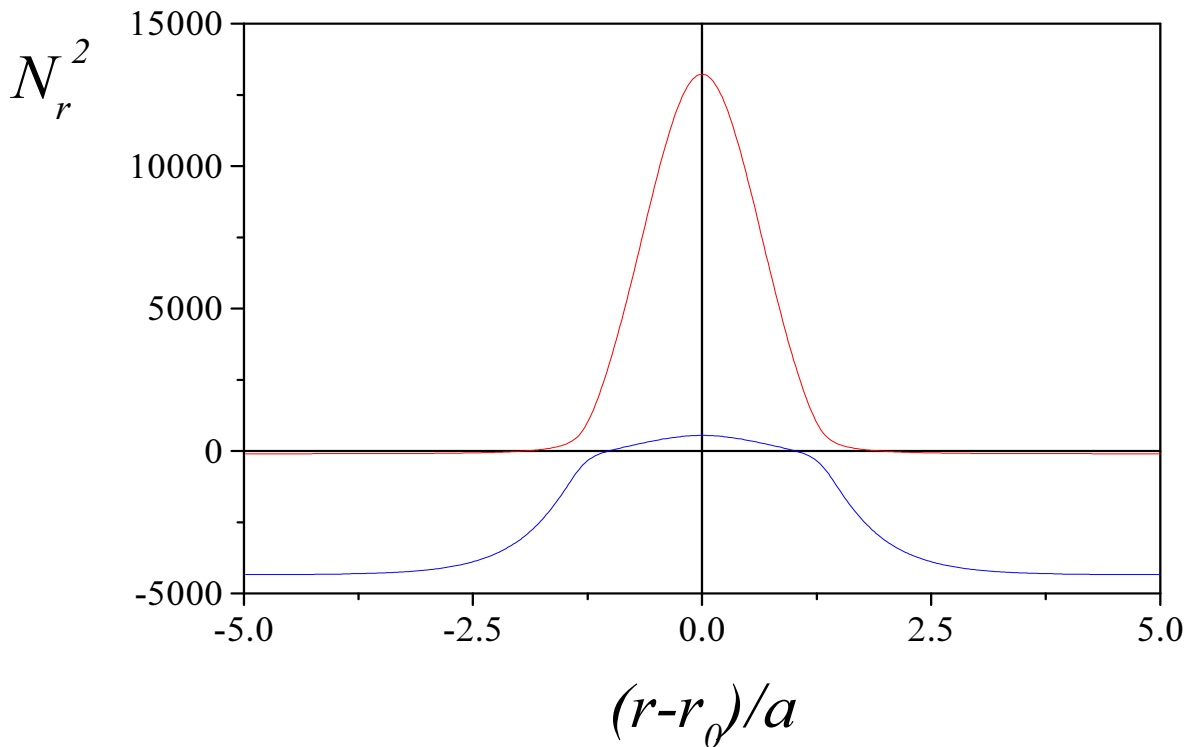


Рис. 3.3 Залежність радіального показника заломлення від радіуса у випадку максимуму на профілі густини, коли поширюються кінетичні альфвенівські хвилі.

$$N_{r\pm}^2 = \frac{\varepsilon_l - N_z^2}{2k_z^2 \rho^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{k_z^2 \rho^2}{\varepsilon_l - N_z^2} \left( N_{\perp}^2 - \frac{c^2 m^2}{\omega^2 r_0^2} \right)} \right]. \quad (3.9)$$

У формулі (3.9) використано позначення:

$$N_{\perp}^2 = \left[ (\varepsilon_l - N_z^2)^2 - \varepsilon_z^2 \right] / (\varepsilon_l - N_z^2). \quad (3.10)$$

Залежність  $N_r^2(r)$  побудовано на рис. 3.3, де параметри плазми обрані такими ж, як і для рис. 3.1 і 3.2. Удалині від області резонансу ця хвиля є швидкою магнітозвуковою хвилею, а поблизу резонансу переходить в альфвенівську. Удалині від збурення густини  $N_r^2 < 0$ , і хвилі не поширюються. Поблизу максимуму  $N_r^2 > 0$ , через що саме там і локалізовано кінетичні АХ.

У випадку холодної плазми коефіцієнт (3.3) при другий похідний є негативним, що відповідає поширенню інерціальних хвиль. Існування локалізованих розв'язків для такої системи стає можливим, якщо величина  $\varepsilon_l(r)$  удалині від точки  $r_0$  на нескінченності буде більше свого резонансного значення (1.1) ( $M > 0$ ) і буде поблизу точки  $r_0$  мати мінімум ( $A < 0$ ). Залежність величини  $(\varepsilon_l(r) - N_z^2)/N_z^2$  від радіуса збігається в цьому випадку із тією, що представлено на рис. 3.1 із точністю до знака (відзначимо, що на рис. 3.1 за нульовий рівень обрано значення  $N_z^2$ ). Таким чином, використовуючи заміну

$$\xi = th\left(\frac{r-r_0}{a}\right), \quad M = +\frac{\rho^2}{a^2} \delta^2 \quad \text{і} \quad A = -\frac{\rho^2}{a^2} s(s+1), \quad (3.11)$$

замість (3.4) одержимо рівняння, що описує власні коливання у випадку мінімуму на профілі густини:

$$\left[ +\delta^2 - s(s+1)ch^{-2}\left(\frac{r-r_0}{a}\right) - a^2 \frac{d^2}{dr^2} \right] E_r = 0. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.12) збігається з (3.4) з точністю до постійного множника, його розв'язок також описується формулою (3.6), і поведінка розв'язку для перших трьох мод збігається з представленими на рис. 3.2.

Власні частоти, що відповідають інерціальним альфвенівським хвилям, дорівнюють:

$$\omega_n = |k_z| v_A \left\{ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} [\delta(2n+1) + n(n+1)] \right\}. \quad (3.13)$$

Залежність квадрата радіального коефіцієнта заломлення (3.9) від радіуса в цьому випадку представлено на рис. 3.4. Графік має розрив у тому інтервалі координат, де уявна частина  $N_r^2$  відмінна від нуля. Параметри плазми обрано такими ж, як і для рис. 3.3.

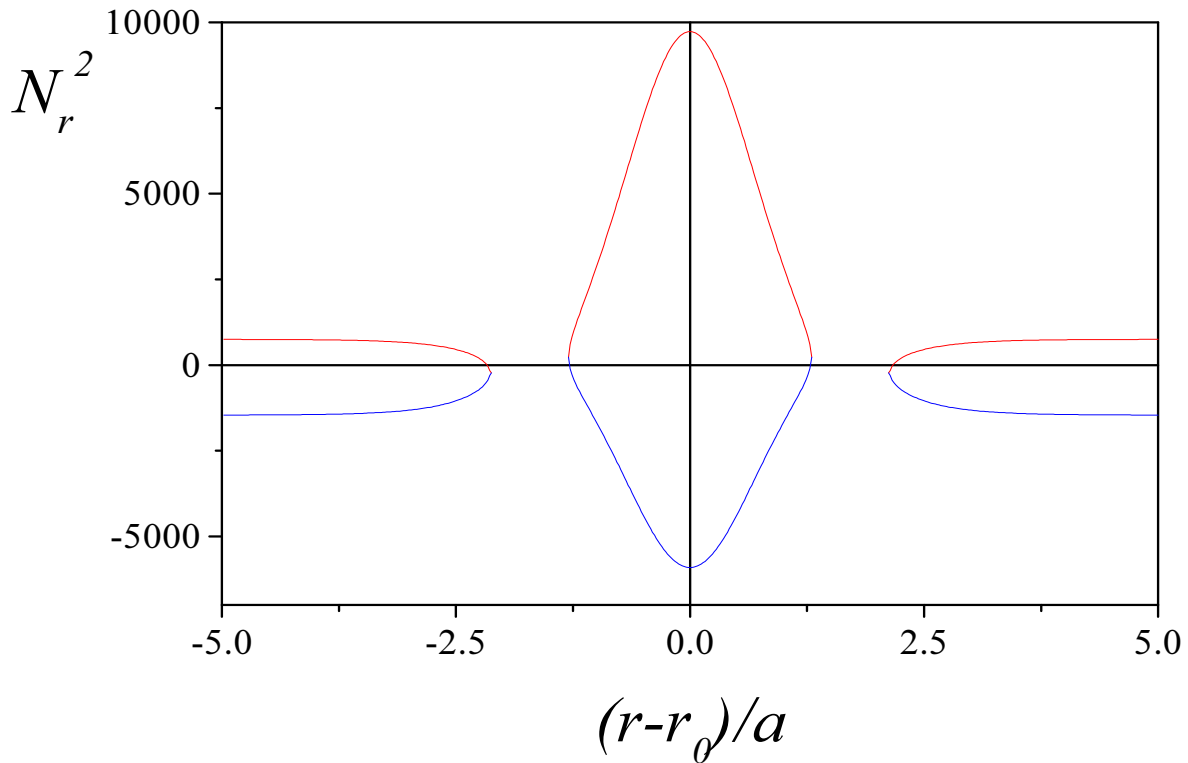


Рис. 3.4 Залежність радіального показника заломлення від радіуса у випадку мінімуму на профілі густості, коли поширюються інерціальні альфвенівські хвилі.

Обговоримо здобуті результати. З теорії альфвенівського резонансу відомо [1, 2, 40, 53], що поблизу точки резонансу (1.1) поле  $E_r$  має сингулярність  $\propto (\varepsilon_l - N_z^2)^{-1}$ . Урахування інерції електронів і скінченного ларморівського радіуса призводить до того, що розв'язок  $E_r(r)$  стає скінченним, хоча і різко змінюється. У цьому підрозділі показано, що для існування локалізованих коливань недостатньо досягнення величиною  $\varepsilon_l$  резонансного значення лише в одній точці. Величина  $(\varepsilon_l - N_z^2)$  повинна звертатися в нуль у двох різних точках, і тоді між ними можуть

локалізуватися дрібномасштабні коливання. Більше того, значення  $\varepsilon_l$  у точці максимуму  $r=r_0$  повинно набувати певного значення:

$$\varepsilon_l - N_z^2 = N_z^2 \left[ (\delta + n)(\delta + n + 1) - \delta^2 \right]. \quad (3.14)$$

Перевищення величиною  $\varepsilon_l$  резонансного значення залежить від значення  $\delta$ , що відповідає густині плазми удалині від точки резонансу.

Величина  $\varepsilon_l(r_0)$  (3.7) досягає мінімального значення при  $n=0$ : воно дорівнює  $N_z^2(1 + \delta \rho^2 / a^2)$ . У тому випадку, якщо  $\varepsilon_l - N_z^2 < \delta N_z^2 \rho^2 / a^2$ , у рамках розглянутої моделі власні коливання існувати не можуть.

З іншого боку, при досить малих  $\delta$  можна необхідну величину  $MN_z^2$  перевищення компоненти  $\varepsilon_l(r_0)$  над її резонансним значенням  $N_z^2$  зробити якою завгодно малою для  $n=0$ . Цей факт узгоджується з відомим результатом із квантової механіки [58], де показано, що нульова мода може існувати в задачі з «потенціальною ямою» форми (3.1) якої завгодно малої глибини. Для старших мод величина (3.7) залишається скінченною при кожному  $\delta$ .

Відзначимо також, що умова застосовності методу вузького шару,  $\rho \ll a$ , легко може бути виконана за умов експерименту. Характерний параметр  $k_r^2 \rho^2$  також є малим в області альфвенівського резонансу,  $k_r^2 \rho^2 \sim \rho/a \ll 1$ , що підтверджує можливість опису плазми в термінах тензора діелектричної проникливості.

Основне рівняння (3.4) отримано в цьому підрозділі з загального рівняння (3.2) шляхом накладення крайових умов, внаслідок чого комбінація в правій частині рівняння (3.2) була покладена рівною нулю. Відхилення цієї комбінації від нульового значення вважається малим у порівнянні з врахованими доданками, наприклад, у порівнянні з доданком, який обумовлений скінченністю ларморівського радіуса іонів і інерцією електронів. Порівняння відкинутих і залишених доданків приводить нас до наступних сильних нерівностей:

$$(\omega/\omega_{ci}) N_g N_z, N_g^2, (\omega/\omega_{ci})^2 N_z^2 \ll c^2/(a\omega)^2. \quad (3.15)$$

(У випадку лінійного профілю густини виконання аналогічних нерівностей полегшено завдяки наявності в правій частині великого додаткового множника  $(a/\rho)^{2/3}$ .) Перше і третє з цих сильних нерівностей можуть бути виконані завдяки

малим множникам  $(\omega/\omega_{ci})$  і  $(\omega/\omega_{ci})^2$ . Нерівність, що залишилася, можна виконати, оскільки характерний радіальний масштаб  $a$ , на якому змінюється профіль густини, є малим у порівнянні з положенням  $r_0$  екстремума густини плазми,  $a \ll r_0$ . Очевидно, що перші дві нерівності точно виконано для симетричних хвиль ( $m=0$ ).

Якщо функція  $\varepsilon_l(r)$  прагне до великого значення удалині від точки резонансу, що відповідає великим значенням параметра  $\delta$ , і, отже, збурення густини повинне мати велике значення, то поблизу мінімуму форму «потенціальної ями» (3.1) можна приблизно вважати параболічною. Наведемо результати розв'язання задачі в цьому граничному випадку [56, 57], коли збурення густини плазми моделюється параболою. Для визначеності будемо розглядати випадок максимуму на профілі густини (суцільна лінія на рис. 3.5):

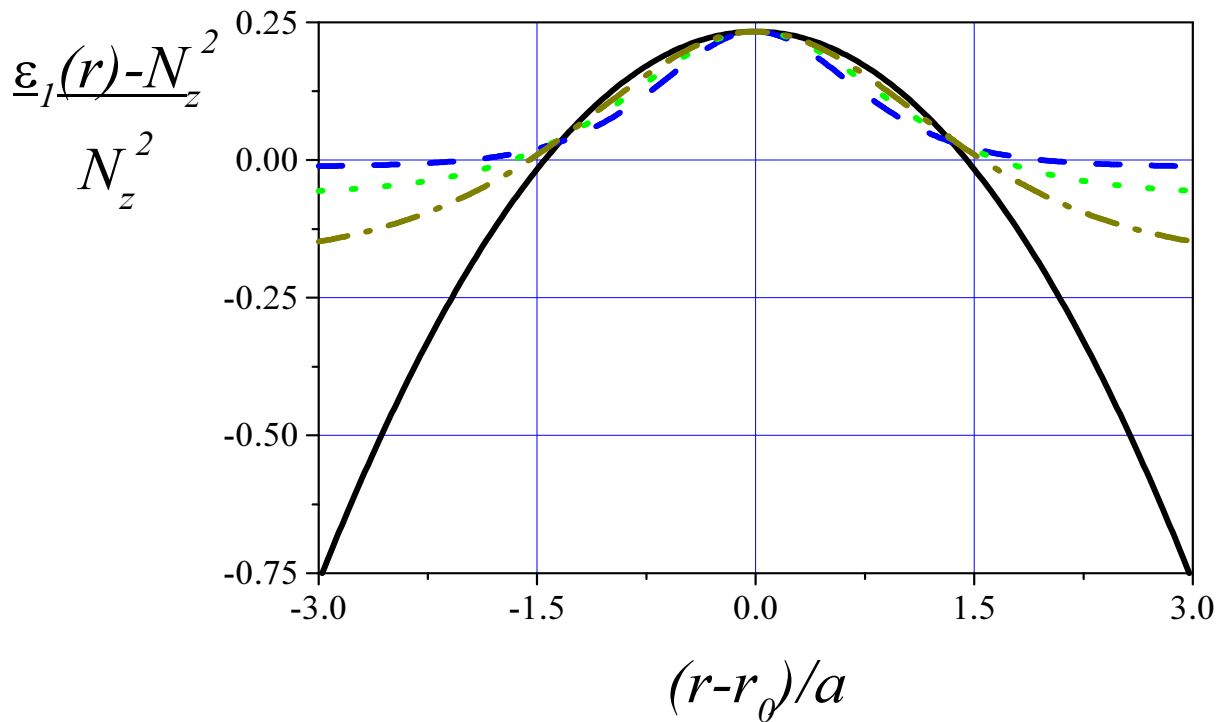


Рис. 3.5 Моделювання профілю величини  $(\varepsilon_l(r) - N_z^2)/N_z^2$ , що лінійно залежить від густини плазми, параболою (3.16) (суцільна лінія) і гіперболічним косинусом (3.1) для різних значень  $\delta$ :  $\delta=1$  – штрихова лінія,  $\delta=3$  – пунктирна лінія,  $\delta=7$  – штрих – пунктирна лінія, - у випадку максимуму на профілі густини і фіксованому  $n=3$ .

$$\varepsilon_l(r) = N_z^2 \left( 1 + B - \left( \frac{r - r_0}{b} \right)^2 \right). \quad (3.16)$$

Власні розв'язки рівняння (3.2) із профілем (3.16) (за відсутності поглинання і з нульовою правою частиною) також знаходяться аналітично і виражаються через поліноми Ерміта [205]:

$$E_r(r) = \exp\left(-\frac{(r - r_0)^2}{2\rho b}\right) H_n\left(\frac{r - r_0}{\sqrt{2\rho b}}\right). \quad (3.17)$$

Ці розв'язки існують тільки при певних значеннях  $B$ , а саме:

$$B = (2n + 1)\rho/b, \quad (3.18)$$

і власні значення частот у цьому випадку дорівнюють:

$$\omega_n = k_z v_A (1 + (n + 0.5)\rho/b). \quad (3.19)$$

Порівнюємо розв'язок, який відповідає профілю густини у вигляді параболи (3.16), з отриманим у цьому підрозділі. При цьому вважаємо температуру електронів і іонів (тобто параметр  $\rho$ ) однаковою в обох випадках, і вимагаємо, щоб у залежностях (3.1) і (3.16) збігалися в точці екстремуму значення величини  $\varepsilon_l$ :

$$\frac{\rho^2}{a^2} [\delta(2n + 1) + n(n + 1)] = \frac{\rho}{b} (2n + 1), \quad (3.20)$$

і її другої похідної:

$$\frac{\rho^2}{a^4} (\delta + n)(\delta + n + 1) = \frac{1}{b^2} \quad (3.21)$$

Власні розв'язки в обох задачах нумеруються натуральним  $n$ . Тому слід накласти умову, що рівності (3.20) і (3.21) виконуються при однакових  $n$ . Тоді дістаємо, що система (3.20) - (3.21) є сумісною, тільки якщо  $\delta \gg n$ . І тоді, нехтуючи  $n$  у порівнянні з  $\delta$  у (3.20), одержуємо зв'язок ширини збурення густини у випадку (3.1) і у випадку параболи (3.16):

$$a^2 = b\rho\delta. \quad (3.22)$$

Видно, що в залежності від значення  $\delta$ , що визначається значенням  $\varepsilon_l$  удалині від  $r_0$ , ширина  $a$  області локалізації збурення густини (3.1) змінюється. Власні значення частоти (3.19) з таким значенням  $b$  (3.22) збігаються з (3.8) на границі

$\delta \gg n$ . При малих  $n$  останнім доданком у (3.7) можна знехтувати.

Зафіксуємо ширину  $b$  параболи і побудуємо графік «потенціальної ями»  $\varepsilon_l(r)$  у вигляді параболи і гіперболічного косинуса з різними  $\delta$  і фіксованим  $n$ . Нехай  $n=3$ . На рис. 3.5 представлено графіки для «потенціальної ями» у вигляді параболи (суцільна лінія) і у вигляді (3.1) з різними значеннями  $\delta$  ( $\delta=1$  – штрихова лінія,  $\delta=3$  – пунктирна лінія,  $\delta=7$  – штрих – пунктирна лінія). На всі криві накладено умови (3.20), (3.21) збігу функцій і їхніх других похідних у мінімумі  $r=r_0$ . Власні моди, що відповідають кожному випадку, представлено на рис. 3.2. Форма «ями» скінченної глибини (3.1) наближається до кривої, що відповідає параболічному профілю густини (3.16), в процесі збільшення  $\delta$ . Аналогічно цьому, як показано на рис. 3.6, радіальний розподіл поля  $E_r(r)$  у випадку збурення густини скінченної глибини наближається до кривої, що відповідає параболічному профілю густини, в процесі збільшення  $\delta$ : що більшого значення набуває  $\delta$ , тим меншою

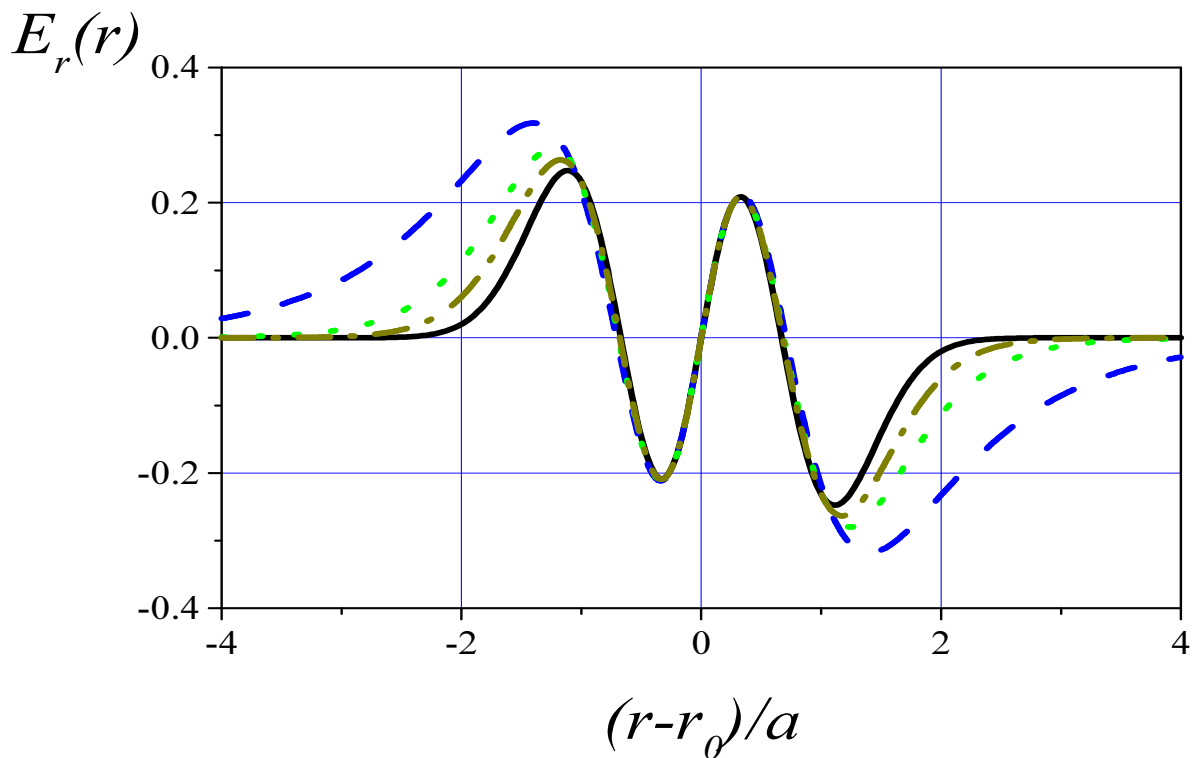


Рис. 3.6 Розв'язки рівняння (3.4) для профілів густини, приведених на рис. 3.5. Позначення ті ж, що і на рис. 3.5.

стає розбіжність між поведінкою кривої, яка зображує розподіл радіальної складової електричного поля хвилі, і суцільною лінією, яка зображує  $E_r(r)$  у випадку параболічного профілю густини плазми.

Порівняємо вирази (3.13) і (3.19) для власних частот. Сусідні значення власних частот (3.19) відрізняються на малу величину, пропорційну  $\rho/a$ . Вираз для власних частот (3.8) містить малий параметр  $(\rho/a)$  у квадраті, але при заданому значенні густини удалині від  $r_0$  (тобто при фіксованому значенні  $M$ ) величина  $\delta$  поводить себе пропорційно  $(a/\rho)$  (див. (3.5)), і тому інтервал між власними частотами із сусідніми радіальними номерами збігається для обох задач у випадку великих значень параметра  $\delta$ , а саме:  $\delta \gg n$ .

Поблизу лінії нульового рівня величини (3.3) недостатньо врахувати в рівнянні (3.2) тільки малі доданки, що пропорційні до  $\rho_{Li}^2 d^2/dr^2$ , також потрібно враховувати наступні доданки, що пропорційні до  $\rho_{Li}^4 d^4/dr^4$ .

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі аналітично досліджено власні електромагнітні коливання, які локалізовано в області, де радіальний профіль густини гарячої плазми досягає максимуму (мінімуму) скінченної висоти (глибини) між двома локальними АР.

Показано, що у випадку гарячої плазми кінетичні альфвенівські хвилі можуть поширюватися поблизу максимуму профілю густини плазми, у випадку холодної – інерціальні АХ можуть поширюватися поблизу мінімуму на профілі густини. В цій частині умови існування локалізованих дрібномасштабних АХ збігаються з тими, що були визначені у випадку нескінченно глибокої параболічної потенціальної ями, який було розглянуто раніше, наприклад, у [56, 57].

Для довільного значення густини плазми удалині від області локалізації збурення густини (іншими словами, для довільного значення  $\delta$ ) існує граничне значення густини в максимумі (мінімумі), при якому можливе виникнення власних коливань. Для існування локалізованих власних коливань при якому завгодно малому перевищенні густиною резонансного значення (1.1) у точці  $r_0$  максимуму (мінімуму) необхідно, щоб густина удалині від  $r_0$  була досить близькою до резо-



нансного значення (1.1).

Знайдено власні частоти цих коливань (3.8) і (3.13), а також показано, що значення власних частот перевищують частоту альфвенівського континуума у випадку максимуму на профілі густини та виявляються менше за неї у випадку мінімуму на профілі густини. Отримано аналітичні вирази для власних мод (див.(3.6) і рис. 3.2).

Проведено порівняльну характеристику отриманих результатів з випадком нескінченно глибокого збурення у формі параболи. На границі глибокої потенціальної ями ( $\delta \gg n$ ) вирази для власних мод та власних частот у цих задачах збігаються.

### 3.2. Поширення альфвенівських хвиль у плазмі великих токамаків зі струмом майже уздовж зовнішнього магнітного поля поблизу локального максимуму поперечного показника заломлення

Як було показано раніше в роботах [65, 66, 141, 142], у токамаках великих розмірів АХ можуть поширюватися майже уздовж тороїдного магнітного поля поблизу локального максимуму поперечного показника заломлення. Вплив обертового перетворення на власні частоти таких АХ досліджено в [67, 206] на основі моделі круглих магнітних поверхонь. У цьому підрозділі проведене в [67] дослідження узагальнено на випадок довільної еліптичної форми полоїдних перерізів магнітних поверхонь. Методика цього дослідження є аналогічною до викладеної в [189], де вивчено вплив обертового перетворення на спектри МГД коливань з малим значенням аксіального хвильового числа. У цьому підрозділі засобами теорії збурень визначено поправки до власних частот АХ, які обумовлено обертовим перетворенням утримуючого магнітного поля.

Розглядаємо поширення АХ у тороїдній пастці. Тиск плазми вважаємо малим у порівнянні з тиском магнітного поля. Утримуюче магнітне поле токамака  $\vec{B}_0 = B_{0R}(R, Z)\vec{e}_R + B_{0\varphi}\vec{e}_\varphi + B_{0Z}(R, Z)\vec{e}_Z$  вважаємо однорідним в аксіальному на-

прямку,  $\partial \vec{B}_0 / \partial \varphi = 0$ . Полоїдні компоненти  $\vec{B}_0$  зазвичай є малими в токамаках,  $|B_{0R,Z}| \ll B_{0\varphi}$ , тому частка  $|B_{0R,Z}| / B_{0\varphi}$  відіграє роль малого параметра задачі.

Умова малості інерції електронів ( $|\varepsilon_3| \rightarrow \infty$ ) призводить при розв'язанні рівнянь Максвелла для альфвенівської гілки електромагнітних коливань до того, що поздовжній компонент електричного поля хвилі  $E_z$  дорівнює нулю у всьому об'ємі плазми,  $E_z = (B_{0R}E_R + B_{0\varphi}E_\varphi + B_{0Z}E_Z) / |\vec{B}_0| \rightarrow 0$ . Отримане в такий спосіб співвідношення між компонентами електричного поля хвилі дозволяє одержати з рівнянь Максвелла наступну систему рівнянь для компонентів електромагнітного поля хвилі  $\propto \exp(im\varphi - i\omega t)$  у циліндричних координатах:

$$\frac{im}{R} E_z + \frac{\partial}{\partial Z} \left( E_R \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} + E_Z \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \right) = \frac{i\omega}{c} B_R; \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial E_R}{\partial Z} - \frac{\partial E_Z}{\partial R} = \frac{i\omega}{c} B_\varphi; \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \left( E_R \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} + E_Z \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \right) + \frac{im}{R} E_R = -\frac{i\omega}{c} B_Z; \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{ic} (\varepsilon_1 E_z - i\varepsilon_2 E_R) = & \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RB_\varphi) - \frac{im}{R} B_R \right] - (\vec{e}_1, \vec{e}_R)^2 \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \left( \frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R} \right) \\ & + (\vec{e}_1, \vec{e}_R)(\vec{e}_1, \vec{e}_Z) \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} \left( \frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R} \right); \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{ic} (\varepsilon_1 E_R + i\varepsilon_2 E_z) = & \frac{im}{R} B_z - \frac{\partial B_\varphi}{\partial Z} - (\vec{e}_1, \vec{e}_Z)^2 \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} \left( \frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R} \right) \\ & + (\vec{e}_1, \vec{e}_Z)(\vec{e}_1, \vec{e}_R) \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \left( \frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Відзначимо, що в цій системі рівнянь (3.23) – (3.27) знехтувано доданками другого і більш високого порядків малості за параметром  $|B_{0R,Z}| / B_{0\varphi}$ . Жирним шрифтом у (3.23) – (3.27) виділено саме ті малі доданки, які обумовлені аксіальним струмом у плазмі.

У нульовому наближенні (у тороїдному магнітному полі,  $B_{0R}=B_{0Z}=0$ ) елект-

ромагнітні коливання з лівою поляризацією,  $E_+ = E_R + iE_Z$ , можуть бути локалізовані поблизу точки  $R \approx R_0$ ,  $Z \approx Z_0$  (див. рис. 3.7), де величина  $k_+^2$  сягає максимуму,

$$k_{\pm}^2 = 2 \left[ \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2) - \frac{m^2}{R^2} \right], \quad \partial k_+^2 / \partial R(R_0, Z_0) = 0, \quad \partial k_+^2 / \partial Z(R_0, Z_0) = 0. \quad (3.28)$$

Розглянуті хвилі поширюються майже уздовж тора. Для них з рівнянь Максвелла (3.23) – (3.27) дістаємо наступне рівняння:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) E_+ + \left( \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{i}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \right) E_+ + k_+^2 E_+ = Q(R, Z), \quad (3.29)$$

яке є справедливим для довільної двовимірної неоднорідності в поперечному перерізі токамака,  $k_+^2 = k_+^2(R, Z)$ . У випадку тороїдного зовнішнього магнітного поля права частина рівняння (3.29) тотожно дорівнює нулю,  $Q \equiv 0$ . Розкладаючи величину  $k_+^2$  поблизу її максимуму в ряд Тейлора по ступенях малих відхилень  $r = R - R_0$  і  $z = Z - Z_0$ , одержуємо

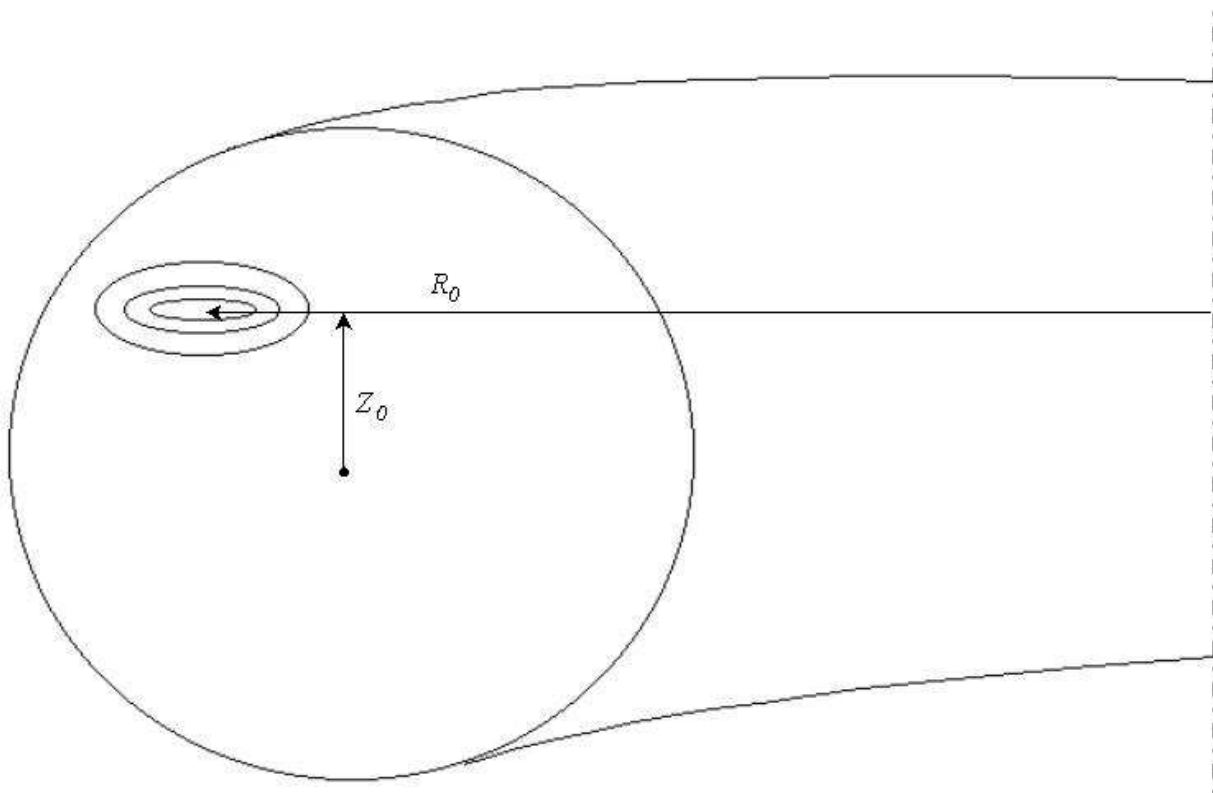


Рис. 3.7 Схематичне зображення вибору координат  $R$ ,  $Z$  і ліній рівня квадрата поперечного показника заломлення  $k_+^2$ . Штрих – пунктирною лінією позначено пряму вісь тора.

$$k_+^2 = k_0^2 - ar^2 - bz^2 - crz, \quad (3.30)$$

де

$$k_0^2 = k_+^2(R_0, Z_0), \quad a = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_+^2}{\partial R^2} \Big|_{R=R_0, Z=Z_0}, \quad b = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_+^2}{\partial Z^2} \Big|_{R=R_0, Z=Z_0}, \quad c = -\frac{\partial^2 k_+^2}{\partial R \partial Z} \Big|_{R=R_0, Z=Z_0}. \quad (3.31)$$

Лінії рівня еліпсів (3.30) показано на рис. 3.7. Якщо півосі еліпсів (3.30) є паралельними до осей  $z=0$  і  $r=0$  (як це показано на рис. 3.7), то коефіцієнт  $c=0$ . При цьому змінні  $r, z$  можуть бути відразу розділені в рівнянні (3.29). При довільному положенні плазмового шнура ми проведемо наступну заміну змінних [65], щоб досягти їхнього розділення,

$$r' = \frac{\alpha r + z}{1 + \alpha^2}, \quad z' = \frac{r - \alpha z}{1 + \alpha^2}, \quad (3.32)$$

тут  $\alpha = \alpha_{l,2}$ ,

$$\alpha_{l,2} = \frac{a-b}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + 1}. \quad (3.33)$$

Заміна (3.32) не тільки надає величині  $k_+^2$  діагонального вигляду, але і зануляє змішані похідні за новими змінними. Внаслідок заміни (3.32) рівняння (3.29) набуває наступного вигляду:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{\alpha - i}{R_0} \frac{\partial}{\partial r'} \right) E_+ + \left( \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{1 + i\alpha}{R_0} \frac{\partial}{\partial z'} \right) E_+ + [k_0^2(1 + \alpha^2) - pr'^2 - qz'^2] E_+ = 0, \quad (3.34)$$

де

$$p = (1 + \alpha^2)(a\alpha^2 + b + c\alpha), \quad q = (1 + \alpha^2)(a + b\alpha^2 - c\alpha). \quad (3.35)$$

Розв'язок рівняння (3.34) виражається через функції Ерміта  $H_n(x)$ ,

$$E_+ \propto H_n(\xi) H_l(\eta) \exp[-0.5(\mu\xi + \nu\eta)], \quad (3.36)$$

де аргументи функцій Ерміта дорівнюють,

$$\xi = \sqrt[4]{pr'}, \quad \eta = \sqrt[4]{qz'}, \quad \mu = \frac{\alpha - i}{\sqrt[4]{pR_0}}, \quad \nu = \frac{1 + i\alpha}{\sqrt[4]{qR_0}}. \quad (3.37)$$

Візьмемо до уваги наступну властивість функцій Ерміта. Їхні індекси  $n$  і  $l$  у (3.36) приймають цілі невід'ємні значення,  $n, l = 0, 1, 2, \dots$ . Внаслідок цього після підстановки  $E_+$  у вигляді (3.36) до рівняння (3.34) одержуємо наступне співвідно-

шення для константи  $(1+\alpha^2)k_0^2$  (див. квадратні дужки в (3.34)),

$$(1+\alpha^2)k_0^2 - \sqrt{q}(2l+1) - \sqrt{p}(2n+1) = \Delta_l. \quad (3.38)$$

У випадку тороїдного магнітного поля права частина рівняння (3.38) дорівнює нулю,  $\Delta_l = 0$ . Співвідношення (3.38) відіграє роль дисперсійного рівняння, з якого можна одержати власні частоти АХ. Наведемо тут найпростіший розв'язок рівняння (3.38) для випадку іонів одного сорту і коливань з частотою  $\omega \leq \omega_{ci}$ . Цей розв'язок зручно представити у вигляді  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ , що наочно демонструє той факт, що розглянуті хвилі поширюються майже уздовж тороїдного напрямку. Основний доданок  $\omega_0$  явно залежить від тороїдного хвильового числа  $m$ ,

$$\omega_0 = -\frac{1}{2} \frac{m^2 v_A^2}{R_0^2 \omega_{ci}} + \sqrt{\left( \frac{m^2 v_A^2}{2 R_0^2 \omega_{ci}} \right)^2 + \frac{m^2 v_A^2}{R_0^2}}, \quad (3.39)$$

тут  $v_A(R_0, Z_0) = c \omega_{ci}(R_0) / \omega_{pi}(R_0, Z_0)$  - альфвенівська швидкість. За порядком величини  $\omega_0 \sim \omega_{ci}$ , якщо  $m \sim R_0 \omega_{pi} / c$ . У цьому випадку умова  $k_+^2 < k_-^2$  виконується, якщо  $k_\phi a^* \sim m a^* / R_0 \gg 1$ , де  $a^*$  - характерна відстань, на якій змінюється густина плазми, тобто ця умова має місце в токамаках великих розмірів.

Поправка  $\Delta\omega$  враховує поперечні хвильові числа  $n$  і  $l$ ,

$$\Delta\omega \approx \frac{v_A^2 (1 - \omega_0 / \omega_{ci})}{\omega_0 [2 + \omega_0 / (\omega_{ci} - \omega_0)]} \frac{1}{1 + \alpha^2} [\sqrt{q}(2l+1) + \sqrt{p}(2n+1)]. \quad (3.40)$$

За порядком величини цю поправку можна оцінити так,

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sim [(2l+1) + (2n+1)] \frac{R_0}{m a^*} \ll 1. \quad (3.41)$$

Відзначимо, що для високих номерів мод,  $(l+n) \gg 1$ , дисперсійне рівняння (3.38) було здобуто в [65], а для мод з довільними значеннями  $l, n$  - у [67].

У струмонесучій плазмі токамаків утримуюче магнітне поле мало відрізняється від тороїдного. Внаслідок врахування малих полоїдних компонентів утримуючого магнітного поля в системі рівнянь (3.23) – (3.27) з'являються малі доданки першого порядку, які виділено в цій системі жирним шрифтом. Урахування малих поперечних компонентів  $B_{0R}$  і  $B_{0Z}$  утримуючого магнітного поля призводить до виникнення малої правої частини рівняння (3.29), яка відрізняється від

нуля,

$$\begin{aligned}
 Q(R, Z) = & \frac{m}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \left( \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} - i \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \right) E_+ \right] \\
 & + (\vec{e}_l, \vec{e}_Z) \left[ (\vec{e}_l, \vec{e}_R) \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} - (\vec{e}_l, \vec{e}_Z) \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} \right] \left[ \frac{m}{R} \frac{\partial E_+}{\partial Z} + i \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{m}{R} E_+ \right) \right] \\
 & - (\vec{e}_l, \vec{e}_R) \left[ (\vec{e}_l, \vec{e}_Z) \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} - (\vec{e}_l, \vec{e}_R) \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \right] \left[ -i \frac{m}{R} \frac{\partial E_+}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{m}{R} E_+ \right) \right]. \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Наявність множників  $B_{0R}$  і  $B_{0Z}$  у визначенні (3.42) указує на те, що  $Q(R, Z)$  є величиною першого порядку малості. Тому при її обчисленні можна скористатися виразом (3.36) для поля  $E_+$ , що є відомим з нульового наближення.

Для одержання поправки  $\Delta_I$  до дисперсійного рівняння (3.38), яка обумовлена струмом у плазмі, скористаємося умовою ортогональності і нормування функцій Ерміта,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_l(x) dx = \delta_{nl}. \quad \text{Помножимо рівняння (3.29) на}$$

$H_n(\xi) H_l(\eta) \exp(0,5(\mu\xi + \nu\eta))$  і проінтегруємо його за змінними  $\xi$  і  $\eta$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Внаслідок цього одержимо дисперсійне рівняння (3.38). У ньому тепер досліджується відмінність утримуючого магнітного поля за напрямком від тороїдного напрямку проявляється у тому, що виникає наступний малий доданок в правій частині цього рівняння,

$$\begin{aligned}
 \Delta_I = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta H_n(\xi) H_l(\eta) \left\{ H_n(\xi) H_l(\eta) \frac{m}{R_0} \left( \frac{\partial}{\partial Z} - i \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} - i \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \right) + \right. \quad (3.43) \\
 & H_n(\xi) H_l(\eta) \left( \frac{-\mu}{2} \frac{\alpha^4 \sqrt{p'}}{1+\alpha^2} - \frac{\nu}{2} \frac{\sqrt[4]{q'}}{1+\alpha^2} \right) \frac{m}{R_0} \left\{ \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} \left[ -i - i(\vec{e}_l, \vec{e}_Z)^2 - (\vec{e}_l, \vec{e}_R)(\vec{e}_l, \vec{e}_Z) \right] + \right. \\
 & \left. \left. \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \left[ -1 + (\vec{e}_l, \vec{e}_R)^2 + i(\vec{e}_l, \vec{e}_R)(\vec{e}_l, \vec{e}_Z) \right] \right\} + \right. \\
 & \left. \frac{H_n(\xi) H_l(\eta)}{2(1+\alpha^2)} \left( -\mu^4 \sqrt{p'} + \nu \alpha^4 \sqrt[4]{q'} \right) \frac{m}{R_0} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} \left[ 1 - (\vec{e}_l, \vec{e}_z)^2 + i(\vec{e}_l, \vec{e}_R)(\vec{e}_l, \vec{e}_z) \right] + \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \left[ -i - i(\vec{e}_l, \vec{e}_R)^2 + (\vec{e}_l, \vec{e}_R)(\vec{e}_l, \vec{e}_z) \right] \right\} + \\
& \left( H'_n(\xi) H_l(\eta) \frac{\alpha^4 \sqrt{p'}}{1 + \alpha^2} + H_n(\xi) H'_l(\eta) \frac{\sqrt[4]{q'}}{1 + \alpha^2} \right) \frac{m}{R_0} \\
& \times \left\{ \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} \left[ -i - i(\vec{e}_l, \vec{e}_z)^2 - (\vec{e}_l, \vec{e}_R)(\vec{e}_l, \vec{e}_z) \right] + \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \left[ -1 + (\vec{e}_l, \vec{e}_R)^2 + i(\vec{e}_l, \vec{e}_R)(\vec{e}_l, \vec{e}_z) \right] \right\} + \\
& \left( H'_n(\xi) H_l(\eta) \frac{\sqrt[4]{p'}}{1 + \alpha^2} + H_n(\xi) H'_l(\eta) \frac{-\alpha^4 \sqrt[4]{q'}}{1 + \alpha^2} \right) \frac{m}{R_0} \\
& \times \left\{ \frac{B_{0R}}{B_{0\varphi}} \left[ 1 - (\vec{e}_l, \vec{e}_z)^2 + i(\vec{e}_l, \vec{e}_R)(\vec{e}_l, \vec{e}_z) \right] + \frac{B_{0Z}}{B_{0\varphi}} \left[ -i - i(\vec{e}_l, \vec{e}_R)^2 + (\vec{e}_l, \vec{e}_R)(\vec{e}_l, \vec{e}_z) \right] \right\} \Bigg\} .
\end{aligned}$$

Відповідна поправка  $\delta\omega$  до частоти  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega + \delta\omega$  МГД коливань, яка обумовлена поздовжнім струмом, виявляється такою, що дорівнює

$$\delta\omega = \frac{\Delta_I}{1 + \alpha^2} \left( \frac{\partial k_0^2}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}^{-1} . \quad (3.44)$$

Відзначимо, що вираз (3.43) для  $\Delta_I$  є пропорційним до тороїдного хвильового числа  $m/R_0$ , що відповідає результатам, отриманим раніше (див. [207] і іншу цитовану в [189] літературу) для хвиль з частотою, яка є далекою від частоти відбиття, тобто для хвиль з великими тороїдними хвильовими числами.

Наприклад, у випадку однорідного профілю температури електронів в утримуючому магнітному полі виникає компонента  $B_{0g}$  уздовж малого азимута, яка лінійно зростає з малим радіусом  $r$ . Припускаючи, що пологі перерізи магнітних поверхонь - це набір концентричних кіл, можна провести точне інтегрування в рівнянні (3.43). У цьому випадку поправка до частоти дорівнює

$$\delta\omega = -\frac{R_0}{m} \frac{B_{0g}}{r B_{0\varphi}} \omega_0 . \quad (3.45)$$

Поправка  $\delta\omega$  (3.44) є малою в порівнянні з внеском  $\Delta\omega$  (3.40), який обумовлено урахуванням скінченних поперечних хвильових чисел.

Підіб'ємо підсумки. В цьому підрозділі досліджено вплив обертового пе-

ретворення утримуючого магнітного поля, яке є властивим для токамаків, на дисперсійні властивості альфвенівських хвиль, що поширюються майже уздовж зовнішнього магнітного поля у плазмі великих токамаків зі струмом поблизу локального максимуму поперечного показника заломлення. Здобуто і проаналізовано явний вираз для поправки до власної частоти цих хвиль, яка обумовлена наявністю поздовжнього струму в токамаках. Показано, що поправка є пропорційною до тороїдного номера моди і колоїдного сталого магнітного поля, викликаного струмом. Цим доведено, що поздовжній струм знімає виродження спектрів цих хвиль відносно знаку аксіального хвильового числа.

### 3.3. Збільшення поглинання ВЧ потужності в області локального альфвенівського резонансу внаслідок відмінності профілю густини плазми від лінійного (точка мінімуму або максимуму)

У цьому підрозділі теоретично досліджено можливість підсилення поглинання альфвенівських коливань неоднорідної плазми магнітних пасток, яке може відбуватися внаслідок відмінності профілю густини від лінійного в області локального АР [55, 208]. Аналітичне дослідження проведено з урахуванням таких ефектів, як скінченність ларморівського радіусу іонів, інерції електронів та зіткнень між частинками плазми. Показано, що за умови наявності точки мінімуму або максимуму в області локального АР відбувається підсилення локального поглинання ВЧ потужності АХ. Це явище пояснюється збільшенням ширини локального АР та збільшенням величини полів альфвенівської хвилі в області АР порівняно до випадку лінійного профілю густини. Одержано явні аналітичні формули для величини ВЧ потужності, що поглинається в АР, на підставі яких проаналізовано залежність потужності від ширини мінімуму та температури електронів в області резонансу. Одержані аналітичні результати добре узгоджуються з даними числового аналізу поглинання, який враховує усі ефекти, що згадані раніше, і який не є обмеженим припущеннями, які є необхідними при проведенні аналітичних оцінок.



Розглянемо поширення та поглинання хвиль з частотою  $\omega \ll \omega_{pe}, |\omega_{ce}|$ . Тиск плазми вважаємо малим порівняно до тиску магнітного поля. Утримуюче магнітне поле вважаємо прямим (спрямованим вздовж вісі циліндричного плазмового стовпа).

Для дослідження структури АР найзручніше використовувати рівняння для амплітуди  $E_r(r)$  радіального компонента електричного поля хвилі  $\propto \exp[i(k_z z + m\vartheta - \omega t)]$ ,

$$\left[ \varepsilon_1 - N_z^2 + i\varepsilon_1^{(c)} + \left( \varepsilon_T + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right) \frac{c^2}{\omega^2} \frac{d^2}{dr^2} \right] E_r = -i \left[ \varepsilon_2 E_\vartheta - \frac{icm}{\omega r} B_z \right], \quad (3.46)$$

яке можна здобути з рівнянь Максвелла та в якому враховані такі слабкі ефекти, як зіткнення між частинками плазми, скінченність ларморівського радіуса іонів та інерція електронів. Вигляд доданка  $(i\varepsilon_1^{(c)})$  в рівнянні (3.46) наведено в підрозділі 1.3 формулою (1.124), він якраз і враховує зіткнення між частинками плазми [184]. Коефіцієнт  $\varepsilon_T$  у рівнянні (3.46) також виписано у підрозділі 1.3 (див. формулу (1.126)), він враховує скінченний іонний ларморівський радіус [185]. Інерція електронів також врахована в (3.46) через компоненту  $\varepsilon_3$  тензора діелектричної проникливості, для якої можна скористатись наведеними в підрозділі 1.3 визначеннями (1.127) – (1.130) із заміною  $k_s \rightarrow 0$ .

З рівняння (3.46) одразу видно, зокрема, що, коли знехтувати вказаними слабкими ефектами,  $E_r$  має особливість поблизу точки АР,  $E_r \propto (\varepsilon_1 - N_z^2)^{-1}$ . Відзначимо, що хоча поля  $E_\vartheta$  та  $B_z$  для аксіально несиметричних хвиль ( $m \neq 0$ ) мають логарифмічну особливість поблизу точки АР,  $B_z, E_\vartheta \propto \ln |\varepsilon_1 - N_z^2|$ , їхня комбінація в правій частині (3.46) не має особливості поблизу точки АР. Більше того, ця комбінація повільно змінюється поблизу точки АР. Цю обставину активно використовують при дослідженні АР у випадку лінійного профілю густини [53, 186, 187]. Її справедливність доведено в підрозділі 2.5. Можливість її застосування для випадку мінімуму (максимуму) на профілі густини визначається нерівностями (3.15).

За перший крок до розв'язання проблеми може служити так званий «холодний розв'язок», який можна одержати з (3.46), коли знехтувати скінченністю лар-

морівського радіуса іонів та інерцією електронів,  $\varepsilon_T \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_3 \rightarrow \infty$ . У цьому випадку ВЧ потужність  $P_r$ , яка поглинається на одиниці довжини плазмового циліндра за рахунок роботи ВЧ поля над радіальним ВЧ струмом  $j_r \propto \exp i(k_z z + m\varphi - \omega t)$  поблизу АР, визначається в наступний спосіб:

$$P_r \equiv 0.5 \operatorname{Re} \int \vec{j}^* \vec{E} dV. \quad (3.47)$$

Її можна порахувати точно аналітичними методами, зокрема,

$$P_r^{(1)} = \frac{\pi\omega}{4} r \left( \frac{d\varepsilon_l}{dr} \right)^{-1} \left| \varepsilon_2 E_\theta - \frac{icm}{\omega r} B_z \right|_{r_A}^2, \quad (3.48)$$

якщо профіль густини  $n(r)$  поблизу АР є лінійним (див. рівняння (2.145) і рис. 3.8).

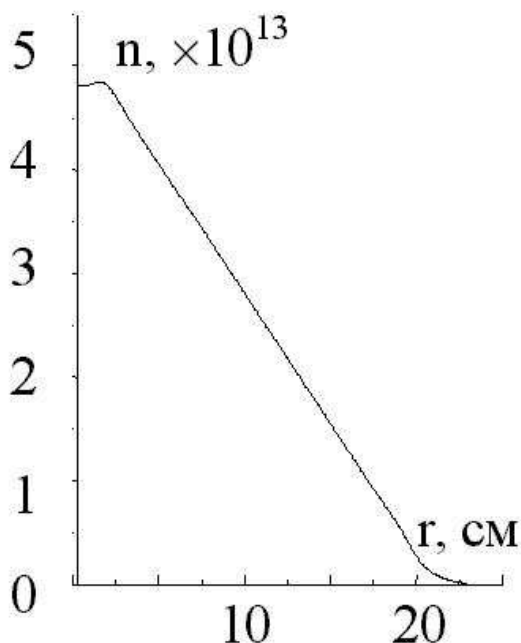


Рис 3.8 Профіль густини у випадку лінійної залежності її величини від радіусу

Потужність  $P_r^{(1)}$  (3.48), що поглинається поблизу АР, не залежить від частоти зіткнень частинок плазми. Відзначимо, що потужність  $P_r$  (3.47), що поглинається поблизу АР, при врахуванні скінченності ларморівського радіуса іонів та інерції електронів має вигляд (3.48) та не залежить також і від температури плазми. Вираз (3.48) для ВЧ потужності, що поглинається поблизу АР у випадку лінійного профілю густини отримано в [53, 186, 187].

У випадку квадратичної залежності профілю густини від радіуса поблизу точки АР (див. рис. 3.9, 3.10),

$$\varepsilon_l^{(2)}(r) = N_z^2 \left( 1 \pm \left( \frac{r - r_A}{a^*} \right)^2 \right), \quad (3.49)$$

потужність  $P_r$  зростає порівняно до (3.48), а саме,

$$P_{r\text{ хол}}^{(2)} = P_{r\text{ хол}}^{(1)} \left( \frac{2N_z^2}{\varepsilon_l^{(c)}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.50)$$

завдяки множнику  $(N_z^2/\varepsilon_l^{(c)})^{1/2} \gg 1$ . Індекс “(1)” вгорі у величини  $P_{r\text{ хол}}^{(1)}$  (3.48) означає, що вона стосується випадку лінійного профілю густини. Аби відрізнити вирази, які стосуються випадку квадратичного профілю густини (3.49), величинам  $\varepsilon_l$  в рівнянні (3.49) і  $P_{r\text{ хол}}^{(2)}$  в (3.50) надано верхній індекс “(2)”.

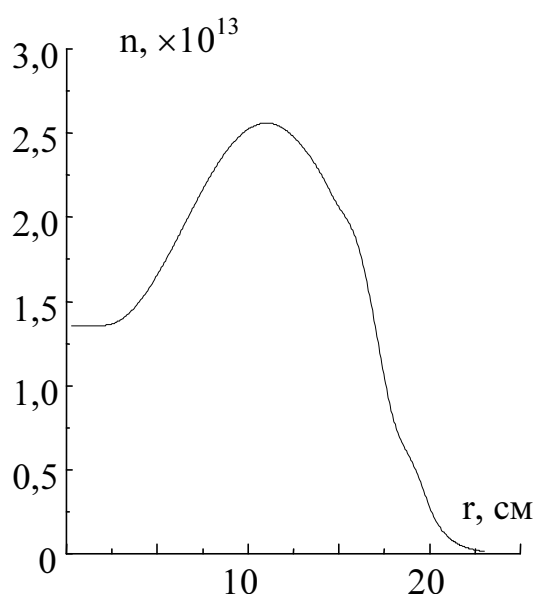


Рис. 3.9 Профіль густини у випадку максимуму

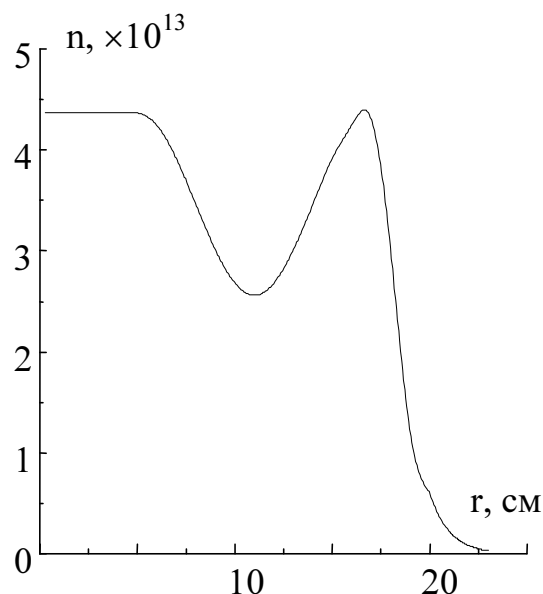


Рис. 3.10 Профіль густини у випадку мінімуму

Порівняння виразів (3.48) та (3.50) дає підставу стверджувати, що відміна форми профілю густини від лінійного супроводжується локальним підсиленням потужності, що поглинається, завдяки підсиленню залежності від частоти зіткнень.

Викладений вище аналіз поглинання ВЧ потужності поблизу АР на основі “холодного розв’язку” не можна вважати за вичерпний, бо загасання АХ завдяки зіткненням звичайно є дуже слабким, і черенковське загасання є переважаючим чинником.

Припускаючи, що при віддаленні від точки АР дрібномасштабна кінетична

хвиля сильно загасає поблизу точки резонансу за рахунок механізму Ландау, записуємо аналітичний розв'язок рівняння (3.46) у наближенні «вузького шару» через циліндричні функції порядку  $l/(n+2)$  від аргументу  $\left[ \frac{2}{n+2} (r-r_A)^{\frac{n+2}{2}} \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_T \varepsilon_3 + \varepsilon_1}} \frac{1}{a^{*n}} \right]$  (тут  $n=2$  для випадку квадратичного профілю густини (3.49)). З аналізу виразу для аргументу дістаємо, що характерна ширина АР дорівнює

$$\lambda^{(n)} = \left[ \frac{2}{n+2} \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{(\varepsilon_T \varepsilon_3 + \varepsilon_1) a^{*n}}} \right]^{\frac{-2}{n+2}}. \quad (3.51)$$

Зокрема, у випадку максимуму на профілі густини поблизу АР

$$\lambda^{(2)} \sim (\rho_{Li} a^*)^{1/2}. \quad (3.52)$$

Аналіз виразу (3.52) вказує на те, що ширина АР зростає при поступовому віддаленні форми профілю густини від лінійної залежності. При цьому також зростає характерне значення поля  $E_r$  поблизу АР,

$$E_r^{(n)} \sim \frac{\left( i\varepsilon_2 E_g + \frac{cm}{\omega r} B_z \right)}{N_z^2} \left( \frac{a^*}{\rho_{Li}} \right)^{\frac{2n}{n+2}}. \quad (3.53)$$

На це вказує множник  $(a^*/\rho_{Li})^{\frac{2n}{n+2}}$ .

Поглинання ВЧ потужності у випадку переважаючого черенковського загасання можна оцінити з (3.46), коли взяти до уваги (3.51),

$$\varepsilon_1^{(c)} \rightarrow \frac{c^2 N_z^2}{\omega^2 \lambda_n^2} \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon_3}. \quad (3.54)$$

Тепер одержуємо, що потужність, яка поглинається у випадку, коли профіль густини відрізняється від лінійного, за порядком величини дорівнює

$$P_{r\text{ чер}}^{(n)} \sim \omega r \left| \varepsilon_2 E_g - \frac{icm}{\omega r} B_z \right|^2 \frac{\operatorname{Im} \varepsilon_3^{-1}}{k_z^2} a^{*\frac{3n}{n+2}} (\rho_{Li})^{-\frac{4n+2}{n+2}}. \quad (3.55)$$

Цю оцінку одержано за умови  $z_e \sim l$ , тобто  $v_A \sim v_{Te}$ . Зокрема, у випадку максимуму на профілі густини потужність, що поглинається одиницею довжини плазмового шнура, можна оцінити за порядком величини у наступний спосіб:

$$P_r^{(2)} \sim P_r^{(l)} \left( \frac{a^*}{\rho_{Li}} \right)^{\frac{l}{2}}. \quad (3.56)$$

Судячи з вигляду (3.56), потужність, що поглинається, за однакових інших обставин, зростає із зростанням ширини резонансу,  $P_r^{(2)} \propto (a^*)^{1.5}$  у випадку максимуму на профілі густини. Залежність потужності, що поглинається, від температури також може бути визначеною, для цього слід лише врахувати у виразі (3.55) залежність  $Im \varepsilon_3^{-1}$  від температури. Ця залежність добре відома, вона протабульована, але не є простою, за винятком випадку, коли  $z_e \sim 1$ . У цьому випадку зростання температури зменшує потужність, що поглинається,  $P_r^{(2)} \propto T^{-0.25}$  у випадку максимуму на профілі густини.

Числовий аналіз поглинання ВЧ потужності поблизу точки локального альфвенівського резонансу був проведений з використанням коду, що його було розроблено Касіловим С.В. При цьому були обрані параметри магнітного уловлювача, що характерні для стелларатора «Ураган», а саме: магнітне поле 5500 Гс, частка частоти хвилі до іонної циклотронної 0,3, радіус тора 100 см, радіус плазми 12,5 см, радіус розташування антени 16 см, радіус стінки 19 см, поперічний розмір антени 24 см, тороїдний розмір антени 12 см, ширина антенного провідника 6 см, густина периферійної плазми  $10^9 \text{ см}^{-3}$ , довжина експоненційного спаду густини 1 см, електронна температура периферійної плазми 3 електрон-вольти.

Розподіл радіальної компоненти електричного поля хвилі (поперічний номер гармоніки  $m=-1$ , для обраної густини в плазмі спостерігається АР, зокрема, для сьомої тороїдної гармоніки,  $l=7$ ) приведено на рис. 3.11 – 3.16. При розрахунках, що відповідають рис. 3.11, 3.13 і 3.15, електронну температуру було обрано рівною десяти електрон-вольтам, а на рис. 3.12, 3.14, і 3.16 - вона дорівнює ста електрон-вольтам. Розподіли поля на рис. 3.11 і 3.12 відповідають лінійному профілю густини (див. рис. 3.8), ті, що на рис. 3.13 та 3.14 - максимуму на профілі густини (див. рис. 3.9), ті, що на рис. 3.15 та 3.16 - мінімуму на профілі густини (див. рис. 3.10).

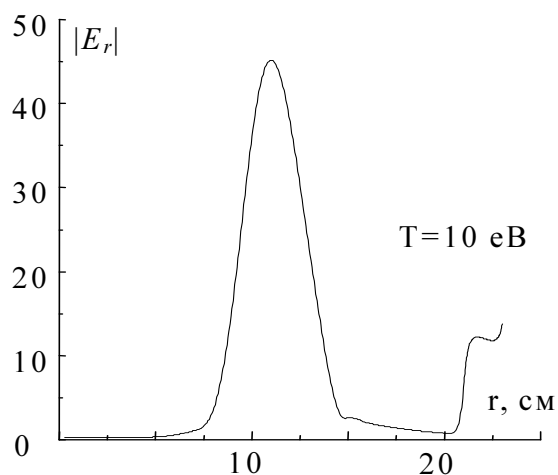


Рис. 3.11 Залежність модуля радіального компонента електричного поля від радіусу у випадку лінійного профілю густини (рис. (3.8)).

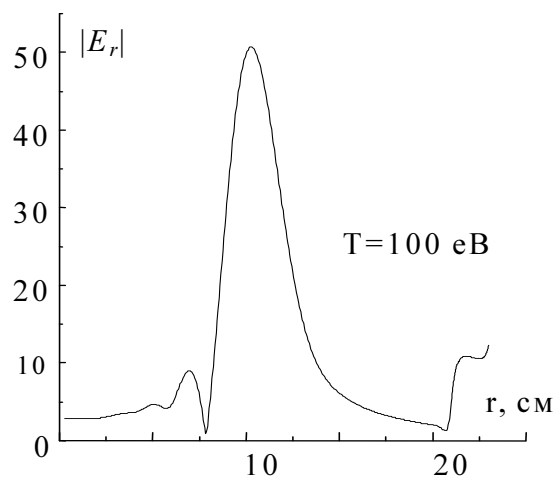


Рис. 3.12 Залежність модуля радіального компонента електричного поля від радіусу у випадку лінійного профілю густини (рис. (3.8)).

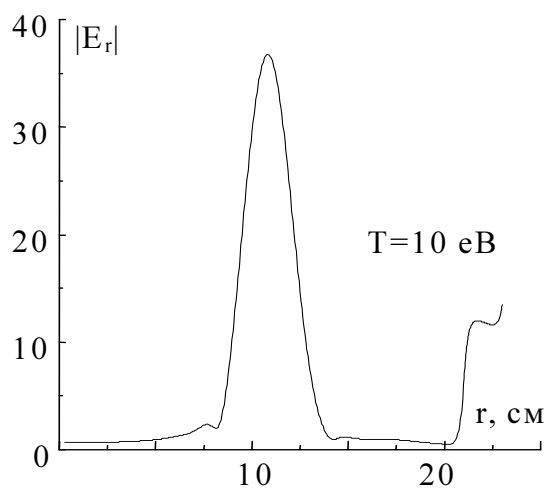


Рис. 3.13 Залежність модуля радіального компонента електричного поля від радіусу у випадку максимуму (рис. (3.9)) на профілі густини.

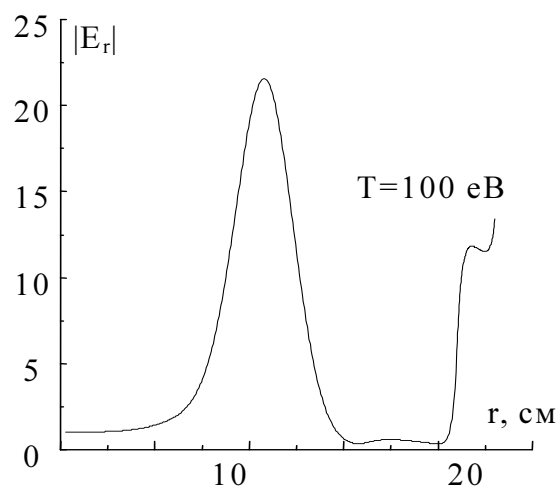


Рис. 3.14 Залежність модуля радіального компонента електричного поля від радіусу у випадку максимуму (рис. (3.9)) на профілі густини.

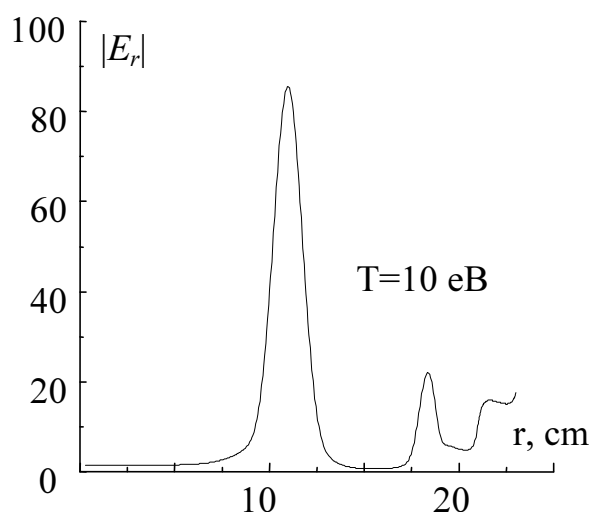


Рис. 3.15 Залежність модуля радіального компонента електричного поля від радіусу у випадку мінімуму на профілі густини (рис. 3.10).

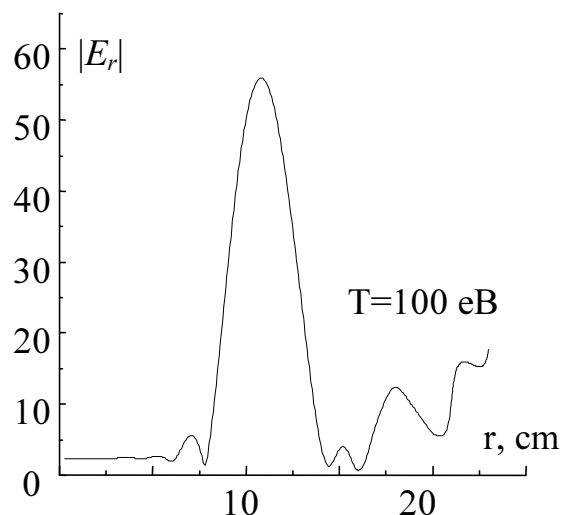


Рис. 3.16 Залежність модуля радіального компонента електричного поля від радіусу у випадку мінімуму на профілі густини (рис. 3.10).

З наведених рисунків видно, що при переході від лінійного профілю густини до профілю з екстремумом величина  $a^*$  (3.49) зменшується, тобто профіль спадає більш круто до периферії. Це призводить до зменшення амплітуди поля  $E_r$  біля межі плазми порівняно до випадку лінійного профілю. (В цьому випадку зменшуються і амплітуди інших компонентів поля хвилі.) Тому при порівнянні числових результатів з аналітичною оцінкою (3.53) слід мати на увазі, що величини  $E_\theta$  та  $B_z$ , а також  $a^*$  зменшуються порівняно до випадку лінійного профілю густини. З наведених графіків залежності  $|E_r(r)|$  видно, тим не менш, що величина поля  $E_r$  в точці резонансу зростає порівняно до значення  $E_r$  поблизу межі плазми сильніше, ніж у випадку лінійного профілю густини. При обраних параметрах, при яких було виконано розрахунки, абсолютне значення поля  $E_r$  у випадках екстремумів таке ж за порядком величини, як і у випадку лінійного профілю. Тому слід чекати, що потужність, що поглинається у резонансному шарі, у цих випадках така ж за порядком величини, як і для лінійного профілю, не зважаючи на вкрай несприятливий ефект послаблення поля внаслідок відбиття електромагнітних хвиль від

плазми.

Таким чином, в цьому підрозділі аналітично досліджено підсилення поглинання електромагнітних хвиль поблизу локального АР за умови, що профіль густини в області АР має точку максимуму або мінімуму. Одержано аналітичні оцінки для величини радіального електричного поля та високочастотної потужності, що поглинається плазмою. Проаналізовано залежність потужності, що поглинається, від температури плазми і параметрів профілю густини. Показано, що збільшення поглинання порівняно із випадком лінійного радіального профілю густини відбувається завдяки розширенню просторової області взаємодії і збільшенню характерних для області АР значень амплітуди електричного поля хвилі.

### 3.4. Висновки до третього розділу

У третьому розділі досліджено поширення, конверсію і поглинання альфвенівських хвиль у плазмовому шнурі: торі або циліндрі з ототожненими кінцями, - в якому параметри плазми немонотонно залежать від координат.

Теоретично доведено можливість поширення дрібномасштабних альфвенівських хвиль поблизу мінімуму (максимуму) на радіальному профілі густини між двома АР за умови, що ця “потенціальна яма” (бар’єр) є скінченної глибини (висоти). Визначено і проаналізовано просторовий розподіл електромагнітних полів, а також величину власної частоти цих хвиль. Показано, що виникнення цих хвиль обумовлено тепловим рухом іонів у випадку максимуму на профілі густини, при цьому власна частота є вищою за частоту альфвенівського континууму. У випадку мінімуму на профілі густини існування дрібномасштабних альфвенівських хвиль викликано скінченною інерцією електронів, у цьому разі власна частота є нижчою за частоту альфвенівського континууму.

З’ясовано вплив поздовжнього струму, властивого для токамаків, на



дисперсійні властивості альфвенівських хвиль, які поширюються майже вздовж зовнішнього магнітного поля у токамаках великих розмірів поблизу локального максимуму поперечного показника заломлення. Показано, що поправка до власної частоти цих хвиль, яку обумовлено поздовжнім струмом, є величиною першого порядку за малою поперечною компонентою утримуючого магнітного поля, а також є пропорційною до аксіального номера моди. Остання обставина інтерпретується як зняття виродження спектрів цих хвиль відносно знака аксіального номера моди поздовжнім струмом.

Вивчено підсилене альфвенівське нагрівання плазми у випадку, коли точка АР співпадає із мінімумом (максимумом) на радіальному профілі густини. Показано, що внаслідок розширення області взаємодії хвилі з частинками плазми у  $(a^*/\rho_{Li})^{1/6}$  разів і збільшення характерного значення амплітуди електричного поля хвилі у  $(a^*/\rho_{Li})^{1/3}$  разів поглинання ВЧ потужності поблизу АР зростає в  $(a^*/\rho_{Li})^{1/2}$  разів. Проаналізовано також залежність поглинутої потужності від ширини мінімуму (максимуму) на профілі густини і температури плазми. Результати проведеного аналітичного дослідження добре узгоджуються із числовими розрахунками.

## РОЗДІЛ 4

### ПОВЕРХНЕВІ МАГНІТОПЛАЗМОВІ ХВИЛІ В МЕТАЛЕВИХ ХВИЛЕВОДАХ КРУГЛОГО ПЕРЕРІЗУ

Лабораторна плазма завжди є обмеженою. Наявність межі поділу середовищ: плазма – діелектрик, плазма – плазма, тощо, - створює можливість для поширення електромагнітних збурень поверхневого типу. Електромагнітні хвилі поверхневого типу (ХПТ) можуть мати певні переваги порівняно до об'ємних хвиль при застосуванні в приладах плазмової електроніки, а також для створення і підтримання газових розрядів [209 - 215]. Їх активно використовують у багатокомпонентних плазмових структурах як базу для створення приладів надвисокочастотної електроніки.

Вперше на можливість розповсюдження ХПТ на межі плазма – метал було вказано в роботі [216]. На перший погляд, поширення ХПТ вздовж межі напівбезкінечна плазма – ідеально провідний метал здається неможливим, бо тангенціальний компонент електричного поля хвилі має бути нульовим на межі такого металу і далі зменшуватись при віддаленні від неї в глибину плазми. Але виявляється, що за наявності зовнішнього магнітного поля існує можливість для нормальної компоненти мати поверхневий характер за умови нульового тангенціального компонента електричного поля в указаній структурі. До того ж, такі хвилі спостерігались експериментально [121]. ХПТ на межі напівбезкінечна плазма – метал у зовнішньому магнітному полі для випадку плоскої геометрії теоретично досліджувались, зокрема, у роботах [217 - 219].

Модель плазми з однорідною густиною добре описує лише випадок твердотільної плазми. Для газової лабораторної плазми є характерною неоднорідність густини. Властивості різних ХПТ у неоднорідній напівобмеженій плазмі, яка межує із металом, досліджувались, зокрема, в роботах [115, 217, 219].

Перші роботи [90, 94, 108, 120], які було присвячено теорії поверхневих електромагнітних хвиль, які поширюються за азимутом поблизу межі плазми у круглих металевих циліндричних хвилеводах, так званих азимутальних поверхне-

вих хвиль (АПХ), також стосувались випадку однорідної густини плазмового наповнення і однорідного зовнішнього магнітного поля. Згодом було теоретично досліджено АПХ у хвилеводах із радіально неоднорідною густиною плазми [220] і радіально неоднорідним аксіальним сталим магнітним полем [109], а також було враховано можливу наявність азимутальної складової сталого магнітного поля [91]. Огляд сучасного стану досліджень поверхневих магнітоплазмових хвиль на межі плазмоподібних середовищ з металом поперек сталого магнітного поля подано в [119].

Даний розділ присвячено подальшому розвитку теорії поширення поверхневих електромагнітних хвиль у хвилеводах круглого перерізу. На додаток до досліджень дисперсійних властивостей АПХ у густій плазмі [90] вивчено поширення АПХ у замагнічених плазмових хвилеводах. Враховано наявність у ХПТ малих аксіальних хвильових чисел при їх поширенні у плазмовому циліндрі без магнітного поля, який відокремлено від металевої камери діелектричним шаром, а також вздовж межі магнітоактивна плазма – метал. Теорію поширення ХПТ розвинуто у цьому розділі шляхом урахування неоднорідності хвилеводів уздовж азимута. А саме, показано можливість поширення поперечних поверхневих хвиль (ПХ) у тороїдних металевих хвилеводах, які повністю заповнено плазмою, а також навколо металевих кілець у неоднорідному зовнішньому тороїдному магнітному полі. Досліджено також дисперсійні властивості поперечних ПХ у металевих хвилеводах, які повністю заповнено двома шарами напівпровідників  $n$  – типу.

У підрозділах 4.3, 4.4 і 4.6 за нульове наближення використано теорію АПХ, що поширюються за азимутом в циліндричному металевому хвилеводі з круглим перерізом радіусом  $a$  [120], повністю заповненому однорідною плазмою. Тому нагадаємо тут тільки основні відомості про властивості АПХ.

При дослідженні поширення АПХ зовнішнє стале магнітне поле  $\vec{B}_0$  вважається паралельним до осі хвилеводу,  $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$ . Компоненти векторів електричної індукції і напруженості електричного поля хвилі вважаються зв'язаними тензором діелектричної проникливості холодної плазми зі слабкими зіткненнями (див., наприклад, [68, 69, 221]).

Для АПХ в однорідній плазмі амплітуда  $B_{\xi}^{(0)}(r)$  основної гармоніки їхнього аксіального магнітного поля хвилі в нульовому наближенні виражається через модифіковану функцію Бесселя  $I_m(\zeta)$ ,

$$B_{\xi}^{(0)}(r) = I_m(k_{\perp}^{(0)} r). \quad (4.1)$$

Глибина  $k_{\perp}^{-1}$  проникнення поля АПХ до плазми визначається в такий спосіб,

$$k_{\perp}^2 = (\omega / c)^2 \varepsilon_1 (\mu^2 - 1), \quad \mu = \varepsilon_2 / \varepsilon_1, \quad . \quad (4.2)$$

Розв'язок  $\omega_m^{(0)}$  дисперсійного рівняння в нульовому наближенні

$$D^{(0)}(\omega_m^{(0)}) = 0, \quad (4.3)$$

вважаємо відомим. Умову (4.3) дістаємо з рівності нулю амплітуди  $E_g^{(0)}(r)$  основної гармоніки поперечної компоненти електричного поля АПХ на межі плазма - метал,  $D^{(0)} \equiv E_g^{(0)}(a)$ . Залежність власної частоти  $\omega_m^{(0)}$  АПХ у нульовому наближенні від параметрів плазмового хвильоводу докладно досліджено в [120].

АПХ із позитивними азимутальними номерами поширюються в низькочастотному (НЧ) діапазоні

$$\sqrt{\omega_{pi}^2 / \varepsilon_0 + \omega_{ci}^2} < \omega_m^{(0)} < |\omega_{ce}|, \quad (4.4)$$

і з негативними номерами  $m$  - у високочастотному (ВЧ) діапазоні

$$\omega_U < \omega_m^{(0)} < \omega_{II} = 0,5|\omega_{ce}| + \sqrt{0,25\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 / \varepsilon_0}, \quad (4.5)$$

де  $\omega_U = \sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 / \varepsilon_0}$  - верхня гібридна частота,  $\varepsilon_0$  - діелектрична проникливість ґратки напівпровідника, у випадку газової плазми  $\varepsilon_0 = 1$ .

#### 4.1. Азимутальні поверхневі хвилі в замагніченій плазмі

У роботах, які присвячено теорії АПХ, зазвичай розглядається випадок густої плазми ( $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ ), при цьому частота досліджуваних коливань лежить в діапазоні вище електронної циклотронної, тому рухом іонного компонента плазми можна знехтувати (див., наприклад, [90 - 95]). Зазначене співвідношення між плазмовою і циклотронною частотами легко може бути виконано в плазмі напівпро-

відників, для якої характерна висока концентрація  $n_e$  вільних електронів. Однак у лабораторній газовій плазмі воно часто буває невиконаним (у кращих експериментах з керованого термоядерного синтезу досягаються концентрації порядку  $n_e \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , проте використання сильного магнітного поля для утримання плазми приводить до нерівності  $\omega_{pe}^2 < \omega_{ce}^2$ . У цьому підрозділі досліджено дисперсійні властивості АПХ саме в замагнічених,  $\omega_{pe}^2 < \omega_{ce}^2$ , плазмових хвильоводах [159, 222]. Показано можливість поширення в таких хвильоводах поверхневих коливань іонного компонента.

Дослідимо поширення поверхневих електромагнітних хвиль поблизу межі однорідного плазмового циліндра радіуса  $a$ , який відокремлено від коаксіальної ідеально провідної металевої камери радіуса  $b$  шаром діелектрика з проникністю  $\varepsilon$ . Хвильовід вважаємо однорідним уздовж осі,  $\partial/\partial z \equiv 0$ . Зовнішнє стале магнітне поле вважаємо орієнтованим уздовж осі хвильоводу:  $\vec{B}_0 \parallel \vec{e}_z$ . У цьому випадку система рівнянь Максвелла розпадається на дві незалежні підсистеми, що описують  $E$  - хвилю з компонентами поля  $E_r, E_\vartheta, H_z$ , і  $H$ -хвилю з компонентами  $H_r, H_\vartheta, E_z$ . Властивості  $H$  - хвилі не залежать від величини зовнішнього магнітного поля. У хвильоводах з вузьким діелектричним шаром ( $b-a \ll a, b-a \ll c/\omega$ ) поверхнева  $H$  - хвиля не поширюється [91]. Тому ми обмежимося тут дослідженням хвиль  $E$  - типу. Оскільки АПХ із різними азимутальними номерами моди  $m$  поширюються незалежно, то, виходячи із симетрії задачі, розв'язок рівнянь Максвелла шукаємо для аксіального компонента магнітного поля АПХ у наступному вигляді,  $H_z = H_z^{(m)}(r) \exp(im\vartheta - i\omega t)$ .

Компоненти електричного поля АПХ виражаються через  $H_z$  у такий спосіб:

$$E_r = \frac{k}{k_0^2} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{m}{r} H_z \right), \quad (4.6)$$

$$E_\vartheta = i \frac{k}{k_0^2} \left( \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} H_z \right), \quad (4.7)$$

де  $k = \omega/c$ , величина  $k_0^{-1}$  визначає глибину проникнення поля до плазми,  $k_0^2 = (\omega/c)^2 (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) / \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{1,2}$  - компоненти тензора діелектричної проникливості плазми.

Виведемо дисперсійне рівняння. Для компонентів полів АПХ зажадаємо виконання наступних крайових умов: рівність нулю тангенціального компонента електричного поля хвилі на металевій поверхні:

$$E_g(r = b) = 0; \quad (4.8)$$

неперервність тангенціальних компонентів електричних і магнітних полів хвилі на межі плазма - діелектрик:

$$E_g(r = a + 0) = E_g(r = a - 0), \quad (4.9)$$

$$H_z(r = a + 0) = H_z(r = a - 0); \quad (4.10)$$

обмеженість полів хвилі в усьому об'ємі хвилеводу і, зокрема, на осі

$$H_z(r = 0) < \infty. \quad (4.11)$$

З рівнянь Максвелла одержуємо для амплітуди магнітного поля  $H_z^{(m)}$  в об'ємі, що його займає плазма, рівняння Бесселя. Розв'язок цього рівняння має задовольняти умові (4.11), тому він виражається через модифіковану функцію Бесселя  $I_m(k_0 r)$  порядку  $m$ ,

$$H_z^{(m)} = C_1 I_m(k_0 r), \quad (4.12)$$

де  $C_1$  – нормувальний множник.

Розв'язок (4.12) має вигляд поверхневої хвилі, якщо  $k_0^2 > 0$ . Звідси дістаємо, що АПХ можуть існувати в замагнічених плазмових хвилеводах в наступних частотних діапазонах:

$$\begin{aligned} \omega_{lh} < \omega < \omega_1 \quad \text{і} \\ \omega_{hh} < \omega < \omega_2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

які будемо називати в цьому підрозділі відповідно низько-частотним (НЧ) і високочастотним (ВЧ).

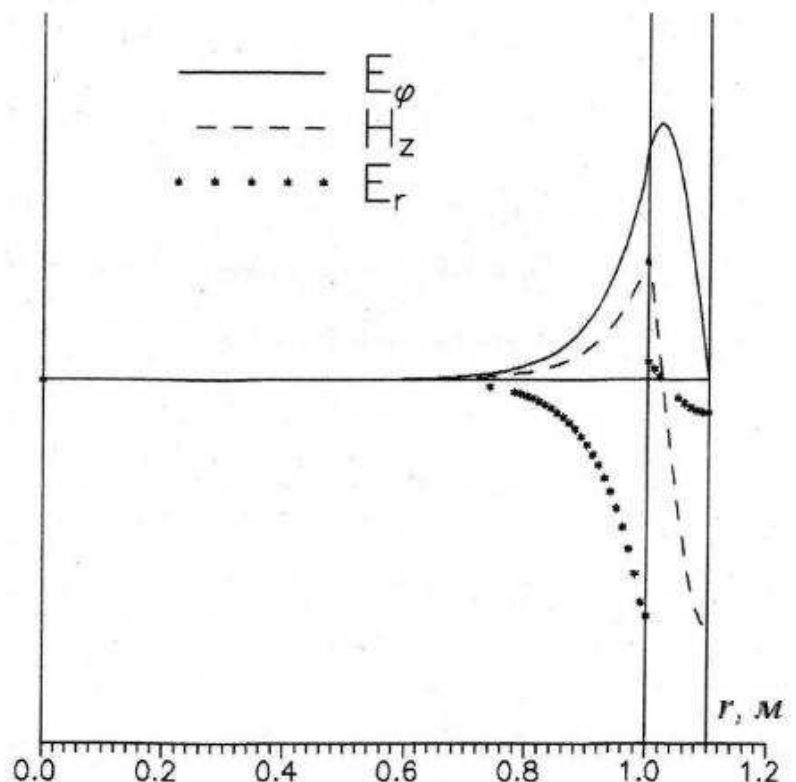


Рис. 4.1 Радіальний розподіл полів  $E$  – хвилі (довільні одиниці).

тним (ВЧ). Тут  $\omega_{lh}$ ,  $\omega_{hh}$  - нижня і верхня гібридні частоти,  $\omega_{1,2} = \pm 0.5|\omega_{ce}| + \sqrt{0.25\omega_{ce}^2 + \omega_{ci}|\omega_{ce}| + \omega_{pe}^2}$  - частоти відсічення об'ємних хвиль [185, 221]. У розрізненій,  $\omega_{pe} < |\omega_{ce}|$ , плазмі ВЧ діапазон стає дуже вузьким і знаходиться поблизу електронної циклотронної частоти, величини частот АПХ у ньому слабо залежать від параметрів плазми. При цьому нижня гібридна частота виявляється порядку іонної циклотронної частоти і виникають умови для існування поверхневих коливань іонного компонента плазми.

В області діелектрика магнітне поле хвилі виражається через лінійну комбінацію функцій Бесселя  $J_m(\kappa r)$  і Неймана  $N_m(\kappa r)$  порядку  $m$ , тобто АПХ є поверхневими тільки в плазмі, у діелектрику вони є об'ємними,

$$H_z^{(m)} = C_2 (J_m(\kappa r)N'_m(\kappa b) + J'_m(\kappa b)N_m(\kappa r)), \quad (4.14)$$

де  $\kappa = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon}$ ,  $C_2$  – нормувальний множник.

На рис. 4.1 представлено залежності полів АПХ від радіуса хвилеводу. При обчисленні були обрані наступні значення параметрів хвилеводу:  $n_e = 2 \times 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $B_0 = 50 \text{ КГс}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $b = 1.1 \text{ м}$ ,  $m = -3$ . Наголосимо, що азимутальний компонент електричного поля відрізняється від нуля в об'ємі хвилеводу, хоча і дорівнює нулю на металевій камері. Цим топологія полів у циліндричній плазмі відрізняється від випадку розповсюдження поверхневих хвиль поперек сталого магнітного поля вздовж пласкатої межі плазми [92, 119]. Слід також зазначити, що для обраних значень параметрів хвилеводу АПХ є істотно непотенціальними: електромагнітна енергія, що її запасено в магнітній компоненті, не є малою порівняно до енергії електричного поля хвилі.

Наклавши крайові умови (4.9) і (4.10), дістаємо дисперсійне рівняння АПХ у вигляді:

$$D^{(pl)} = D^{(vac)}, \quad (4.15)$$

де

$$D^{(pl)} = \frac{1}{k_0} \frac{I'_m(k_0 a)}{I_m(k_0 a)} + \frac{m \varepsilon_2}{k_0^2 a \varepsilon_1}, \quad (4.16)$$

$$D^{(vac)} = \frac{1}{\kappa} \frac{J'_m(\kappa a) N'_m(\kappa b) - J'_m(\kappa b) N'_m(\kappa a)}{I_m(k_0 a)}, \quad (4.17)$$

Проаналізуємо дисперсійне рівняння (4.15) – (4.17). У граничному випадку вузького діелектричного шару ( $m\Lambda \ll 1$ ,  $\kappa(b-a) \ll |m|$ , де  $\Lambda \equiv (b-a)/a$ ), коли вплив параметрів плазми на дисперсійні властивості АПХ є найсильнішим, права частина дисперсійного рівняння істотно спрощується,

$$D^{(vac)} \approx (b-a) \left( \frac{m^2}{\kappa^2 a^2} - 1 \right). \quad (4.18)$$

Звідси видно, що в широких хвильоводах з вузьким діелектричним шаром АПХ не поширюються, бо ліва частина (4.15) є додатною в силу нерівності ( $k_0 a \gg |m|$ ), а права є від'ємною при  $\omega_{lh} > (|m|c)/(a\sqrt{\varepsilon})$ , унаслідок чого дисперсійне рівняння не має розв'язків (див. також числовий розрахунок на рис. 4.5). Наочний аналітичний розв'язок рівняння (4.15) для АПХ у НЧ діапазоні можна отримати також у випадку тонкого циліндра,  $\kappa b \ll 1$ ,  $k_0 a \ll 1$ ,

$$\frac{\omega}{\omega_{ci}} \approx 1 + \frac{|\gamma|}{|\gamma| + \varepsilon} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}, \quad (4.19)$$

де використано позначення

$$\gamma \equiv \frac{a^{2m} - b^{2m}}{a^{2m} + b^{2m}}. \quad (4.20)$$

Для вузького діелектричного шару  $\gamma \approx m\Lambda \ll 1$ . При цьому, як видно з (4.19), власна частота хвильоводу визначається не абсолютною величиною ширини діелектричного шару ( $b-a$ ), а відносною  $\Lambda$ . У даному випадку хвилі є односпрямованими: знак азимутального хвильового числа може бути тільки негативним ( $m < 0$ ). Напрямок поширення АПХ збігається з напрямком циклотронного обертання іонів, і їхня частота може бути порядку іонної циклотронної. При цьому АПХ поширюються в тонкому циліндрі (дисперсійне рівняння (4.15) має розв'язок у вигляді поверхневої хвилі з  $\omega > \omega_{lh}$ ), якщо плазма не занадто розріджена або зовнішнє магнітне поле не занадто велике, тобто має місце нерівність:

$$m_i/m_e > \omega_{pi}^2/\omega_{ci}^2 \geq \{1 + (\varepsilon/|\gamma|)^2\}. \quad (4.21)$$



Для існування АПХ поблизу межі густа плазма-метал ( $b=a$ ) необхідною умовою є наявність зовнішнього магнітного поля [92]. Однак у випадку тонкого замагніченого плазмового циліндра, який межує з металевим хвилеводом, дисперсійне рівняння (4.15) не має розв'язку.

У випадку тонкого плазмового циліндра ( $k_0 a \ll |m|$ ) АПХ можна вважати квазіпотенціальними: магнітне поле хвилі набагато менше електричного. Амплітуда електричних полів АПХ з азимутальним номером  $m=-1$  залишається практично незалежною від радіальної координати навіть в області плазми.

Результати числового розв'язання дисперсійного рівняння (4.15) представлені на рис. 4.2 - 4.4. Графічно показано залежність частоти АПХ від параметрів хвилеводної структури: концентрації - на рис. 4.2, величини зовнішнього магнітного поля  $B_0$  - на рис. 4.3 і проникливості діелектричного шару  $\varepsilon$  - на рис. 4.4. При цьому були обрані наступні значення параметрів хвилеводу: для всіх кривих, представлених на цих рисунках  $a = 10$  см,  $L=0.1$ ; для рис. 4.2  $B_0=3000$  Гс, кон-

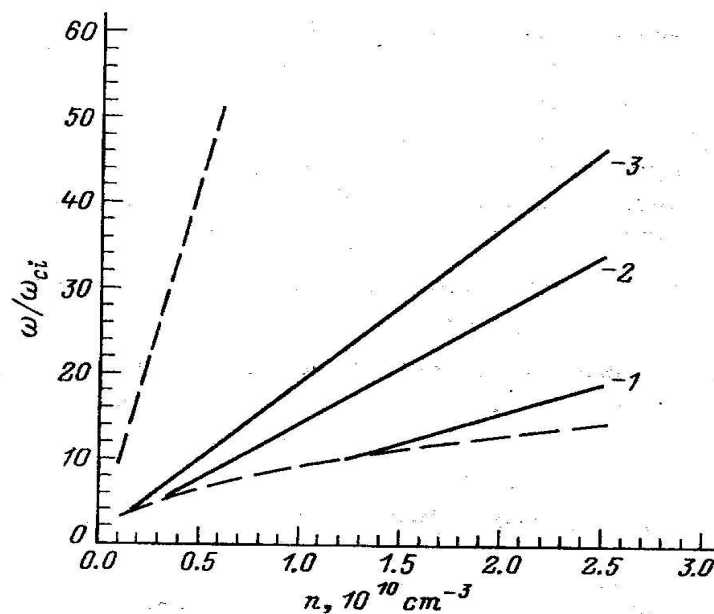


Рис. 4.2 Залежність (суцільні лінії) власної частоти, нормованої на іонну циклотронну частоту, АПХ від концентрації плазми у випадку вузького діелектричного шару. Числами  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$  позначено азимутальні номери мод  $m$ , штриховими лініями показані межі НЧ діапазону.

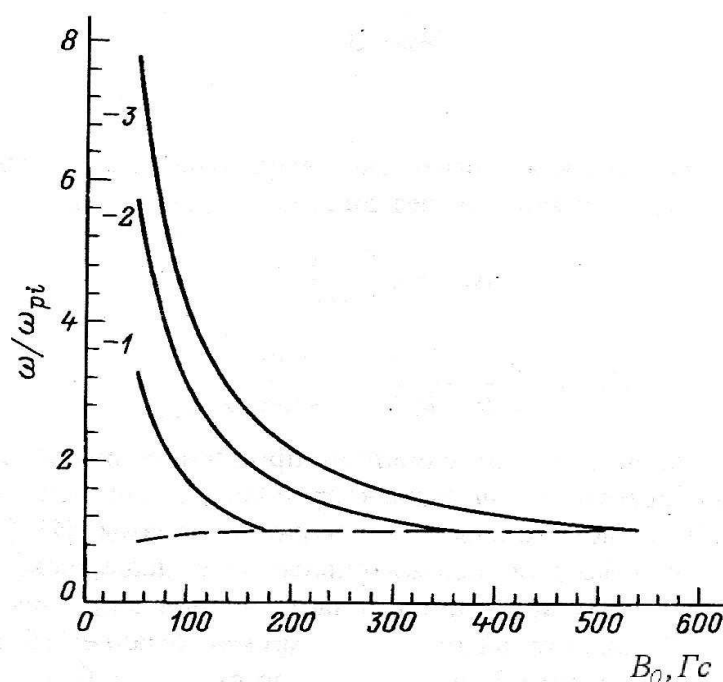


Рис. 4.3 Залежність власної частоти, нормованої на іонну ленгмюрівську частоту, АПХ від напруженості зовнішнього сталого магнітного поля у випадку вузького діелектричного шару. Використано такі ж позначення, як і на рис. 4.2.

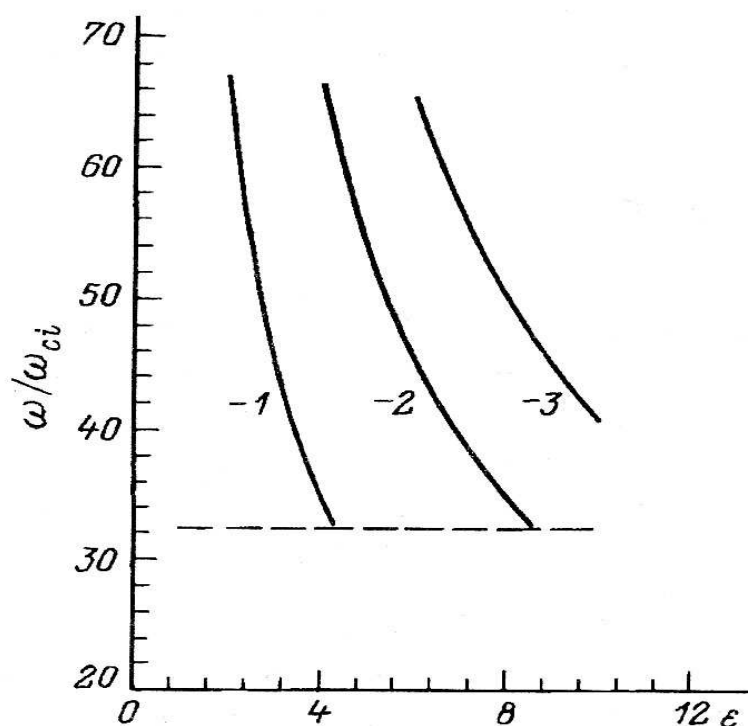


Рис. 4.4 Залежність власної частоти, нормованої на іонну циклотронну частоту, АПХ від проникливості вузького діелектричного шару. Використано такі ж позначення, як і на рис. 4.2.

центрація плазми нормована на  $10^{10} \text{ см}^{-3}$ ; для рис. 4.3 і 4.4  $n_e = 10^8 \text{ см}^{-3}$  і для рис. 4.4  $B_0 = 50 \text{ Гс}$ .

У хвильоводах із широким діелектричним шаром властивості АПХ слабо залежать від параметрів плазми і визначаються в основному властивостями діелектричного шару. При цьому для даного азимутального номера можливе існування вищих радіальних гармонік АПХ, і розв'язки рівняння (4.15) існують при виконанні умов

$$(n+0.5)\pi < (b-a)\omega/c < (n+1)\pi, n=1,2,3..., ka \gg |m|. \quad (4.22)$$

У цьому випадку АПХ є істотно непотенціальними. У широких хвильоводах, що знаходяться у сильних магнітних полях,  $k_0 a \gg |m|$ , глибина проникнення поля у плазму є малою, й аналітичний вираз для частоти  $n$ -ї радіальної моди має вигляд  $\omega = \omega_{0n} + \delta\omega$ , де

$$\omega_{0n} = 0.5\pi nc/(b-a), \quad \delta\omega = \frac{k_0}{\kappa} \frac{c}{b-a} \left( 1 - \frac{m\varepsilon_2}{k_0 a \varepsilon_1} \right) \Big|_{\omega=\omega_{0n}}. \quad (4.23)$$

Для хвиль з малою глибиною проникнення залежність частоти від азимутального номера  $m$  є слабо вираженою. І ця залежність слабшає зі збільшенням концентрації плазми. З (4.23) видно, що  $\delta\omega$  для позитивних  $m$  є більшою, ніж для негативних, і розходження в частоті хвиль із протилежними азимутальними номерами є максимальним поблизу верхньої межі НЧ діапазону, де  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ .

Результати числового розв'язання дисперсійного рівняння у випадку широкого діелектричного шару наведено на рис. 4.5. При цьому обрано наступні значення параметрів хвильоводу:  $a = 1 \text{ м}$ ,  $L = 0.1$ ,  $B_0 = 50 \text{ КГс}$ ,  $m = 3$ . Частота нульової радіальної моди лежить в межах від близько двадцяти іонних циклотронних частот до близько сорока  $\omega_{ci}$ . Межі частотного діапазону першої радіальної моди становлять близько  $60\omega_{ci}$  і  $80\omega_{ci}$ .

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі досліджено дисперсійні властивості незвичайних електромагнітних коливань, що поширюються за азимутом поблизу межі замагніченої плазми, яка частково заповнює циліндричний хвильовід. Вивчено розподіл полів (див. формули (4.12), (4.14) та рис. 4.1) і залежність власної час-

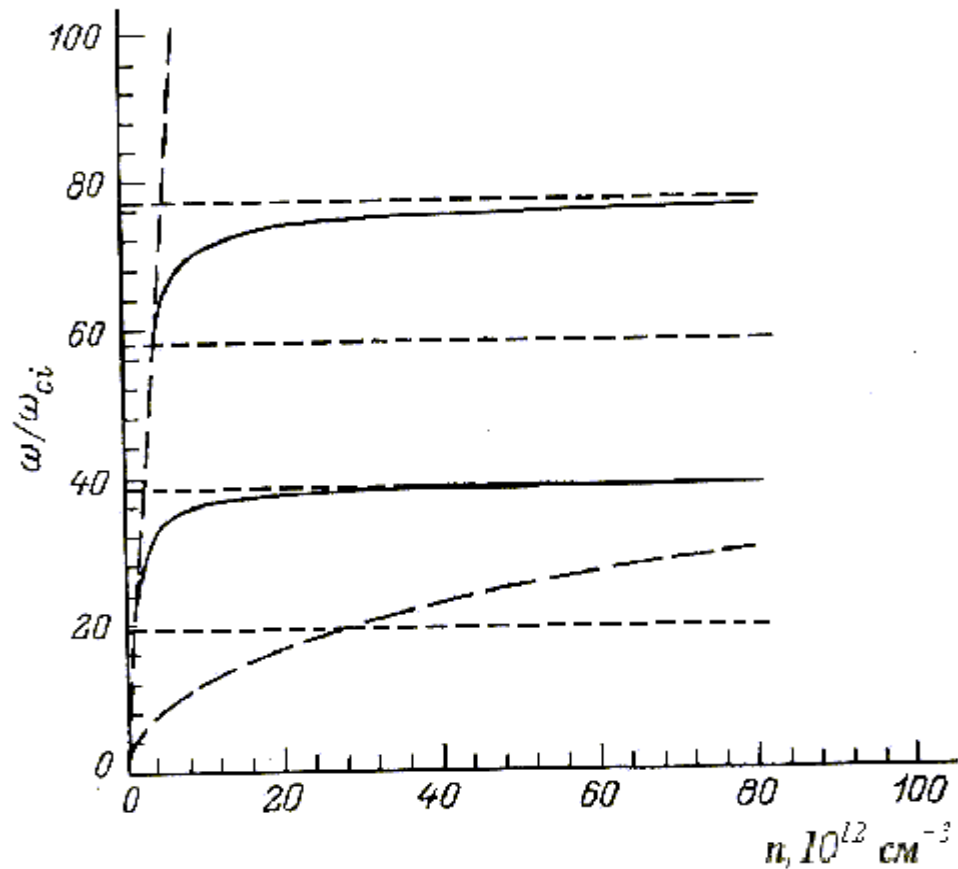


Рис. 4.5 Залежність (суцільні лінії) власної частоти, нормованої на іонну циклотронну частоту, АПХ від концентрації плазми у випадку широкого діелектричного шару. Лініями з довгими штрихами показано межі НЧ діапазону, горизонтальними лініями з короткими штрихами – межі діапазонів (4.22) для радіальних мод.

тоти АПХ (див. формули (4.19), (4.23) та рис. 4.2 – 4.5) від параметрів хвильоводної структури.

Як приклад наведемо розрахунок власної частоти АПХ із азимутальним номером  $m=-3$ , що поширюється в повністю іонізованій гелієвій плазмі при  $a = 10$  см,  $B_0 = 3000$  Гс,  $T = 1$  еВ,  $n_e = 10^{10}$  см $^{-3}$ ,  $\Lambda = 0.1$ . У цьому випадку частота АПХ  $\omega = 19\omega_{ci} = 1.4 \times 10^8$  с $^{-1}$ .

Отримані результати можуть знайти застосування при проектуванні приладів плазмової електроніки, що використовують замагнічену плазму як елемент хвильоводної структури (див., наприклад [223, 224]).

#### 4.2. Довгохвильові несиметричні поверхневі моди плазмових хвильоводів без магнітного поля

Звичайно, на практиці збуджуються ХПТ із широким спектром по аксіальних хвильових числах  $k_z$ . Тому у цьому підрозділі теоретично досліджено дисперсійні властивості електромагнітних поверхневих хвиль з довільними значеннями азимутального номера моди і малим значенням аксіального хвильового числа, що поширюються в циліндричних хвильоводах, що мають тонке діелектричне покриття внутрішньої поверхні і є частково заповненими плазмою без магнітного поля [163]. Задача розглядається в гідродинамічному наближенні, плазма вважається холодним радіально неоднорідним середовищем. Вивчено залежність власної частоти хвиль від параметрів плазми, діелектричного шару між металевою стінкою хвильоводу і стовпом плазми, а також від значень аксіального хвильового числа й азимутального номера моди. Показано, що аксіальні фазові швидкості несиметричних поверхневих мод перевищують швидкість світла в діелектрику, а при зменшенні товщини діелектрика до нуля (тобто уздовж межі холодна плазма без магнітного поля - метал) поверхневі моди не поширюються. Дані дослідження є продовженням і узагальненням тих досліджень, що були започатковані в [108], на випадок малих значень аксіального хвильового числа. Як приклад практичного застосування отриманих теоретичних результатів зроблено також розрахунки електродинамічних параметрів стаціонарного газового розряду, підтримуваного даними ХПТ у діапазоні малих аксіальних хвильових чисел, для яких аксіальним переносом енергії ХПТ можна знехтувати в порівнянні з азимутальним. Обчислено потужність, що поглинається газорозрядною плазмою в режимах омічного і резонансного загасання цих мод, а також показано, що вироблена в розряді плазма є азимутально однорідною. Відмінною рисою даної теоретичної роботи є сполучення аналітичних і числових методів розв'язання складних трансцендентних рівнянь з безліччю коренів при дослідженні даної проблеми. Такий підхід дозволяє уникнути чисто обчислювальних помилок, яким піддані дослідження, що використовують винятково числові методи.

Дослідимо поширення електромагнітних ХПТ у хвильоводі циліндричної ге-

ометрії, що складається з плазмового стовпа радіусом  $a$  і діелектричного шару товщиною  $(b-a)$ , охоплених металевим екраном радіусу  $b$ . Вважаємо, що метал має ідеальну провідність, діелектрична проникливість плазми  $\varepsilon_p = 1 - \omega_{pe}^2 \omega^{-2}$ , ( $\omega_{pe}$  – ленгмюрівська частота електронів), а шар діелектрика характеризується діелектричною проникливістю  $\varepsilon_d$ .

Залежність полів ХПТ від часу  $t$ , азимутального кута  $\varphi$  і аксіальної координати  $z$  обираємо у вигляді  $\exp[i(k_z z + m\varphi - \omega t)]$ , де  $k_z$  – аксіальне хвильове число,  $m$  – азимутальний номер моди,  $\omega$  – частота ХПТ. При цьому поля ХПТ задовольняють наступним крайовим умовам: - амплітуди полів даної хвилі є обмеженими в об'ємі хвилеводу; - тангенціальна складова електричного поля дорівнює нулю на внутрішній поверхні металевої камери; - тангенціальні компоненти електричних і магнітних полів ХПТ неперервні на межі плазма - діелектрик. Врахування ненульового аксіального хвильового числа призводить до зачеплення  $E$ - і  $H$ - хвиль на відміну від випадку АПХ [108], для яких за цих умов характерною є незвичайна поляризація. Тому із системи рівнянь Максвелла для ХПТ із скінченим  $k_z$  дістаємо рівняння для всіх шести компонентів поля хвилі.

Здобудемо дисперсійне рівняння. У радіально неоднорідній плазмі система рівнянь Максвелла для шести компонентів поля ХПТ зводиться до наступної системи диференціальних рівнянь другого порядку, які є зачепленими одне з одним, для аксіальних компонентів електричних і магнітних полів (див., напр., [170]),

$$\frac{\varepsilon_p - N_z^2}{\varepsilon_p r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varepsilon_p r}{\varepsilon_p - N_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_p - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] E_z = P B_z, \quad (4.24)$$

$$\frac{\varepsilon_p - N_z^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\varepsilon_p - N_z^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_p - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] B_z = Q E_z, \quad (4.25)$$

де аксіальний показник заломлення  $N_z = ck_z/\omega$ . Праві частини рівнянь (4.24) і (4.25) відповідно дорівнюють,

$$P = i \frac{\varepsilon_p - N_z^2}{\varepsilon_p} N_z \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{N_z^2 - \varepsilon_p}; \quad (4.26)$$

$$Q = i(\varepsilon_p - N_z^2)N_z \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\varepsilon_p - N_z^2}. \quad (4.27)$$

Інші компоненти полів ХПТ виражаються через  $E_z$  і  $B_z$  у такий спосіб (див., напр., [170]),

$$E_r = (\varepsilon_p - N_z^2)^{-1} \left[ \frac{ic}{\omega} N_z \frac{\partial E_z}{\partial r} - N_g B_z \right], \quad (4.28)$$

$$E_g = (\varepsilon_p - N_z^2)^{-1} \left[ \frac{c}{i\omega} \frac{\partial B_z}{\partial r} - N_z N_g E_z \right], \quad (4.29)$$

$$B_r = N_g E_r - N_z E_g, \quad (4.30)$$

$$B_g = N_z E_r - \frac{c}{i\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad (4.31)$$

де азимутальний показник заломлення  $N_g = cm/(\omega r)$ .

У випадку слабкої радіальної неоднорідності плазми розв'язок рівнянь (4.24) і (4.25), що задовольняє зазначеній вище крайовій умові обмеженості на осі хвилеводу, можна знайти методом варіації сталої в наступному вигляді,

$$E_z = \varphi \left( A_1 - A_2 \int_a^r \frac{\tilde{\varphi} P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})} \right) + A_2 \tilde{\varphi} \int_0^r \frac{\varphi P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})}, \quad (4.32)$$

$$B_z = \psi \left( A_2 - A_1 \int_a^r \frac{\tilde{\psi} Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} \right) + A_1 \tilde{\psi} \int_0^r \frac{\psi Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})}. \quad (4.33)$$

Тут  $A_{1,2}$  – константи інтегрування. У виразах (4.32) і (4.33) функції  $\varphi(r)$  і  $\psi(r)$  – розв'язки рівнянь (4.24) і (4.25) з нульовими правими частинами, обмежені на осі хвилеводу (при  $r=0$ ), функції  $\tilde{\varphi}(r)$  і  $\tilde{\psi}(r)$  – лінійно незалежні від  $\varphi(r)$  і  $\psi(r)$  розв'язки цих же рівнянь, що мають особливість на осі. Вронськіани цих функцій дорівнюють відповідно:

$$W(\varphi, \tilde{\varphi}) = \varphi \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} - \tilde{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \propto \frac{\varepsilon_p - N_z^2}{\varepsilon_p r}, \quad (4.34)$$

$$W(\psi, \tilde{\psi}) = \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} - \tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \propto \frac{\varepsilon_p - N_z^2}{r}. \quad (4.35)$$

Розв'язок рівнянь Максвелла в діелектричному шарі знаходиться в явному вигляді. Оскільки для досить короткохвильових збурень, для яких  $k_z^2 > \varepsilon_d \omega^2 / c^2$ , ди-

сперсійне рівняння не має розв'язків у вигляді ХПТ, надалі обмежимося випадком досить малих аксіальних хвильових чисел, для яких реалізується нерівність:  $\kappa^2 = \varepsilon_d \omega^2 / c^2 - k_z^2 > 0$ .

У діелектричному шарі радіальна залежність полів ХПТ, яка задовольняє зазначеним вище крайовим умовам на металевій стінці камери, визначається функціями Бесселя  $J_m(x)$  і Неймана  $N_m(x)$  у такий спосіб:

$$E_z = S_1 [J_m(\kappa r) N_m(\kappa b) - J_m(\kappa b) N_m(\kappa r)], \quad (4.36)$$

$$B_z = S_2 [J_m(\kappa r) N'_m(\kappa b) - J'_m(\kappa b) N_m(\kappa r)]. \quad (4.37)$$

Тут  $S_{1,2}$  – константи інтегрування.

Внаслідок підпорядкування полів ХПТ крайовим умовам дістаємо дисперсійне рівняння у вигляді

$$\det \| a_{ij} \| = 0, \quad (4.38)$$

де  $i, j = 1, 2, 3, 4$ ,

$$a_{11} = \frac{N_z N_g}{N_z^2 \varepsilon_p} \varphi + \frac{c}{i \omega \varepsilon_p - N_z^2} \frac{1}{\partial r} \int_0^a \frac{\psi Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} \Big|_{r=a}, \quad (4.39)$$

$$a_{12} = \frac{N_z N_g}{N_z^2 - \varepsilon_p} \tilde{\varphi} \int_0^a \frac{\varphi P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})} + \frac{c}{i \omega \varepsilon_p - N_z^2} \frac{1}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad (4.40)$$

$$a_{13} = \frac{\omega}{i c \kappa} [J'_m(\kappa a) N'_m(\kappa b) - J'_m(\kappa b) N'_m(\kappa a)], \quad (4.41)$$

$$a_{14} = -\frac{k_z m}{a \kappa^2} a_{24}, \quad (4.42)$$

$$a_{21} = \varphi(a), \quad a_{22} = \tilde{\varphi}(a) \int_0^a \frac{\varphi P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})}, \quad (4.43)$$

$$a_{23} = a_{44} = 0, \quad a_{24} = J_m(\kappa a) N_m(\kappa b) - J_m(\kappa b) N_m(\kappa a), \quad (4.44)$$

$$a_{31} = \frac{N_z N_g}{N_z^2 - \varepsilon_p} \tilde{\psi} \int_0^a \frac{\psi Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} + \frac{i c}{\omega \varepsilon_p - N_z^2} \frac{\varepsilon_p}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad (4.45)$$

$$a_{32} = \frac{N_z N_g}{N_z^2 - \varepsilon_p} \psi + \frac{i c}{\omega \varepsilon_p - N_z^2} \frac{\varepsilon_p}{\partial r} \int_0^a \frac{\varphi P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})} \Big|_{r=a}, \quad (4.46)$$

$$a_{33} = -\frac{k_z m}{a \kappa^2} a_{43}, \quad (4.47)$$



$$a_{34} = \frac{i\omega}{cK} [J'_m(\kappa a)N_m(\kappa b) - J_m(\kappa b)N'_m(\kappa a)], \quad (4.48)$$

$$a_{41} = \tilde{\psi}(a) \int_0^a \frac{\psi Q \phi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})}, \quad a_{42} = \psi(a), \quad (4.49)$$

$$a_{43} = J_m(\kappa a)N'_m(\kappa b) - J'_m(\kappa b)N_m(\kappa a). \quad (4.50)$$

Виявляється, що при розкритті визначника (4.38) не утворюються доданки, пропорційні непарним ступеням  $k_z$  чи  $m$ . Отже, власні частоти ХПТ є виродженими щодо знаку аксіального хвильового числа й азимутального номера моди. А ма-ла поправка до власної частоти ХПТ, яка обумовлена врахуванням малого  $k_z$ , є квадратичною за аксіальним хвильовим числом. Нагадаємо, що АПХ у хвилеводі без магнітного поля також є виродженими щодо знака  $m$  [108].

Якщо плазма є радіально однорідною, то рівняння (4.24) і (4.25) звертаються в однорідні рівняння Бесселя. При цьому радіальний розподіл полів  $E_z$  і  $B_z$  визначається модифікованими функціями Бесселя:  $E_z = A_1 I_m(k_\perp r)$  і  $B_z = A_2 I_m(k_\perp r)$ , - і всі елементи матриці  $a_{ij}$  виражаються в явному вигляді:

$$a_{11} = a_{32} = \frac{k_z m}{a k_\perp^2} I_m(k_\perp a), \quad a_{12} = \frac{i\omega}{c k_\perp} I'_m(k_\perp a), \quad (4.51)$$

$$a_{21} = a_{42} = I_m(k_\perp a), \quad a_{22} = a_{41} = 0, \quad (4.52)$$

$$a_{31} = -\varepsilon_p a_{12}. \quad (4.53)$$

Величина  $k_\perp$  визначає радіальний масштаб неоднорідності поля хвилі в плазмі,

$$k_\perp^2 = k_z^2 - \varepsilon_p \omega^2 / c^2. \quad (4.54)$$

Умова позитивності виразу (4.54) для  $k_\perp^2$  визначає діапазон частот, у якому електромагнітні хвилі поширюються в плазмі у вигляді ХПТ,

$$\omega^2 < \omega_{pe}^2 + c^2 k_z^2. \quad (4.55)$$

Таким чином, частотний діапазон (4.55) існування довгохвильових ХПТ є ширшим, ніж у випадку АПХ [108] (для яких  $k_z = 0$ ).

Подальший аналіз дисперсійного рівняння виконано для випадку вузького діелектричного шару,  $\kappa(b-a) \ll |m|$ . Бо у протилежному випадку набіг фази електромагнітної хвилі в діелектричному шарі виявляється великим, і вплив плазмового заповнення хвилеводу на дисперсійні властивості хвилі стає малим.

У загальному випадку, коли діелектрична проникливість шару  $\varepsilon_d$  не є занадто близькою до одиниці, врахування малого значення аксіального хвильового числа  $k_z$  призводить до появи ще одного, більш низькочастотного (у порівнянні з випадком АПХ) розв'язку. Надалі в цьому підрозділі цей розв'язок будемо називати повільною модою. Її частота  $\omega_-$  слабко залежить від номера моди  $m$  і практично є пропорційною до величини  $k_z$ , тобто величина  $\omega_-$  прагне до нуля при  $k_z \rightarrow 0$ . Групова швидкість повільної моди завжди є позитивною,  $\partial\omega_-/\partial k_z > 0$ , і за модулем зазвичай перевершує абсолютне значення групової швидкості швидкої моди.

Про швидку моду можна сказати наступне. Її частота  $\omega_+$  на границі, при  $k_z \rightarrow 0$ , переходить у частоту АПХ. Якщо діелектрична постійна шару  $\varepsilon_d$  не є занадто близькою до одиниці, дисперсійна залежність швидкої моди характеризується негативною дисперсією,  $\partial\omega_+/\partial k_z < 0$ . При цьому врахування малого значення аксіального хвильового числа призводить до невеликого зниження частоти ХПТ у порівнянні з частотою АПХ. Це дозволяє обчислити частоту швидкої моди ХПТ методом послідовних наближень, використавши за нульове наближення теорію АПХ [108]. Мала негативна поправка до частоти виявляється при цьому квадратичною за  $k_z$ .

Зростання величини аксіального хвильового числа  $k_z$  призводить до того, що частоти швидкої та повільної мод наближаються одна до одної, і при певному значенні  $k_z = k_0$  обидві моди характеризуються однаковою частотою  $\omega_0$ . Виходить, що для ХПТ із частотами, близькими до  $\omega_0$ , групова швидкість ХПТ  $\partial\omega/\partial k_z$  необмежено зростає, і поняття групової швидкості втрачає зміст. Ця обставина інтерпретується в такий спосіб. Для ХПТ із частотою й аксіальним хвильовим числом, близькими до  $\omega_0$  і  $k_0$ , відповідно, обране тут представлення електромагнітного збурення у вигляді однієї гармоніки  $\propto \exp[i(k_z z + m\vartheta - \omega t)]$  є некоректним. Поблизу обговорюваної точки на дисперсійній кривій залежність  $k_z(\omega)$  може приблизно бути описана квадратичною параболою,

$$k_z(\omega) = k_0 - (\omega - \omega_0)^2 / \alpha, \quad (4.56)$$

де  $k_0 = k_z(\omega_0)$ ,  $\alpha$  - певна константа, що має розмірність прискорення  $m/c^2$ . Тоді елек-

тромагнітний імпульс  $\propto \exp[-t^2/(2\tau^2)] \cos(k_0 z - \omega_0 t)$  тривалістю  $\tau$  розпливається на відстанях порядку  $\alpha\tau^2/2$  від точки, де він був сформований.

Аналітично розв'язок дисперсійного рівняння (4.38) вдається здобути в двох граничних випадках, а саме, для широких,  $a \gg |m|\delta$ , та вузьких,  $a \ll |m|\delta$ , плазмових хвильоводів (тут і далі  $\delta = c/\omega_{pe}$  - глибина скін - шару).

Для зручності сприйняття результати аналітичного дослідження представлені у вигляді таблиці 4.1. У ній наведено асимптотичні вирази для частот  $\omega_+$ ,  $\omega_-$  (з точністю до малих доданків  $\propto k_z^2$ ) і  $\omega_0$ , а також максимально можливого значення аксіального хвильового числа  $k_0$  і параметра  $\alpha$ , що характеризує відстань, на якій живе електромагнітний імпульс з частотою  $\omega_0$ .

Таблиця 4.1

Величина	Границя $a \gg  m \delta$	Границя $a \ll  m \delta$
$\omega_+ \approx$	$\frac{ m c}{a\sqrt{\varepsilon_d}} \sqrt{\frac{b-a}{\delta+b-a} + \frac{k_z^2 a^2}{m^2} (1-\varepsilon_d)}$ (4.57)	$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_d}} \sqrt{\frac{ m (b-a)}{a\delta^2} + k_z^2 (1-\varepsilon_d)}$ (4.62)
$\omega_- \approx$	$ck_z \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon_d(b-a)}}$ (4.58)	$ck_z$ (4.63)
$\omega_0 \approx$	$\frac{ m c}{a\sqrt{2\varepsilon_d}} \sqrt{\frac{b-a}{\delta+b-a}}$ (4.59)	$\omega_{pe} \sqrt{\frac{ m (b-a)}{a} \left(1 - \sqrt{1-\varepsilon_d^{-1}}\right)}$ (4.64)
$k_0 \approx$	$\frac{ m (b-a)}{2a\sqrt{\delta(b-a+\delta)}}$ (4.60)	$\sqrt{\frac{ m (b-a)}{\delta^2 a} \left(2\varepsilon_d - 1 - 2\varepsilon_d \sqrt{1-\varepsilon_d^{-1}}\right)}$ (4.65)
$\alpha \approx$	$\frac{c^2  m }{2\varepsilon_d a} \sqrt{\frac{\delta}{b-a+\delta}}$ (4.61)	$\frac{c^2 \sqrt{ m (b-a)} \left(2\varepsilon_d - 1 - 2\varepsilon_d \sqrt{1-\varepsilon_d^{-1}}\right) \sqrt{1-\varepsilon_d^{-1}}}{2\varepsilon_d \delta \left(1 - \sqrt{1-\varepsilon_d^{-1}}\right) \sqrt{a}}$ (4.66)

З виразів (4.57), (4.58) і (4.62), (4.63) видно, що в загальному випадку, коли

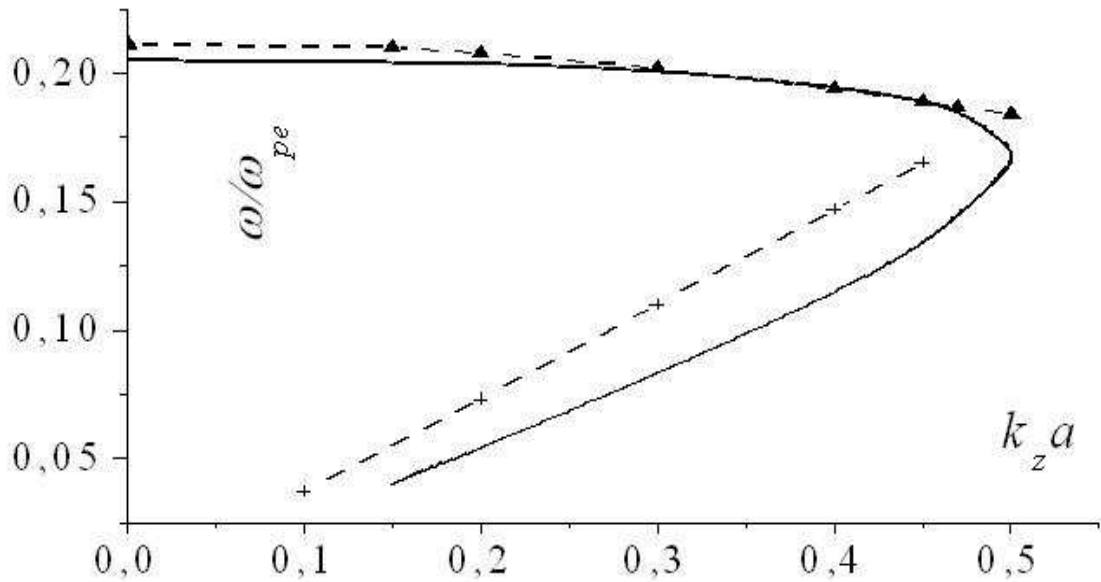


Рис. 4.6 Частота ХПТ, нормована на ленгмюрівську частоту, як функція аксіального хвильового числа, помноженого на радіус плазмового стовпа, у випадку широкого хвильоводу. Суцільна і пунктирна лінії побудовані, відповідно, за результатами числового розв'язання дисперсійного рівняння (4.38) і аналітичними формулами (4.57) і (4.58).

діелектрична проникливість шару  $\varepsilon_d$  не є занадто близькою до одиниці, частота довгохвильових ХПТ є нижчою за частоту відповідних АПХ (за інших рівних умов). З асимптотичних виразів (4.57) і (4.62) дістаємо, що групова швидкість швидкої моди дорівнює нулю в загальному випадку тільки при  $k_z=0$ . Відзначимо, що у випадку вакуумного шару,  $\varepsilon_d=1$ , частота швидкої моди визначається як сума частоти АПХ і наступної малої поправки  $\propto k_z^4$  (тобто другим наближенням).

Більш детальну інформацію про властивості ХПТ можна одержати шляхом числового аналізу дисперсійного рівняння (4.38). Результати дослідження представлені у вигляді графіків на рис. 4.6 – 4.10. Проаналізуємо ці графічні залежності.

На рис. 4.6 і 4.7 суцільною лінією показані результати числового розв'язання дисперсійного рівняння (4.38) для ХПТ з азимутальними номерами

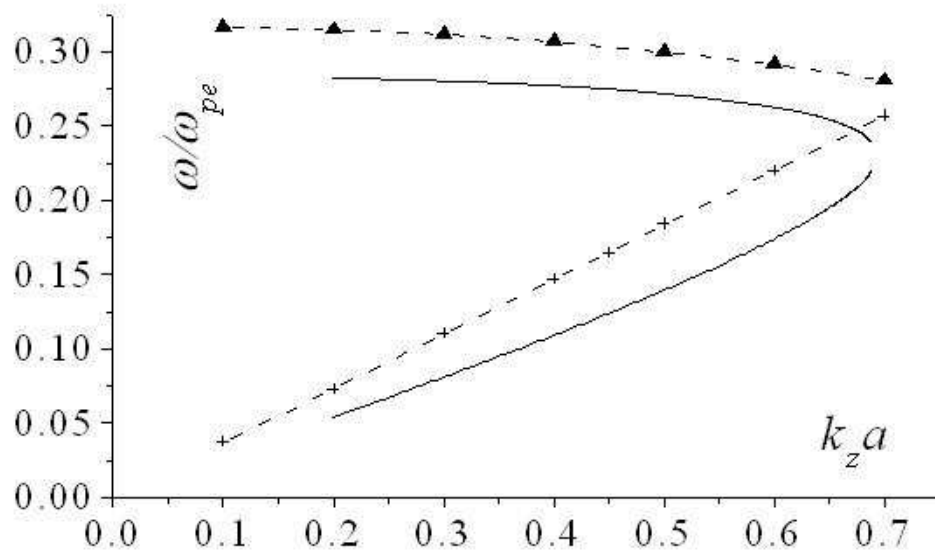


Рис. 4.7 Частота ХПТ, нормована на ленгмюрівську частоту, як функція аксіального хвильового числа, помноженого на радіус плазмового стовпа, у випадку широкого хвильоводу:  $m=3$ ,  $\varepsilon_d=2$ ,  $\delta/a=0.3$ . Суцільна і пунктирна лінії побудовані, відповідно, за результатами числового розв'язання дисперсійного рівняння (4.38) і аналітичними формулами (4.57) і (4.58).

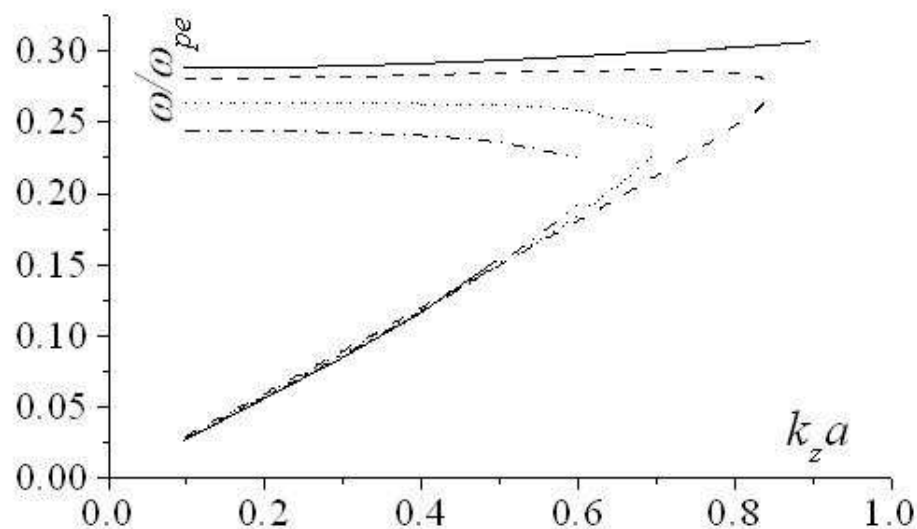


Рис. 4.8 Частота ХПТ, нормована на ленгмюрівську частоту, як функція аксіального хвильового числа, помноженого на радіус плазмового стовпа, у випадку широкого хвильоводу:  $\delta/a=0.3$ . Суцільною, штриховою, крапковою і штрих - пунктирною лініями представлені результати у випадках  $\varepsilon_d=1$ ,  $\varepsilon_d=1.05$ ,  $\varepsilon_d=1.2$  і  $\varepsilon_d=1.4$ , відповідно.

$m=2$  (рис. 4.6) і  $m=3$  (рис. 4.7). При цьому були обрані наступні значення параметрів хвильоводу: частка глибини скін - шару до радіуса плазми  $\delta/a=0.3$ ; діелектрична проникливість шару  $\varepsilon_d=2$ ; ширина діелектричного шару  $(b-a)=0.1a$ . Відзначимо слабку відмінність поведінки дисперсійних кривих повільної моди на цих графіках. Значення частоти  $\omega_-$  на рис. 4.6 і рис. 4.7 навіть при  $k_z a=0.4$  розрізняються не більше, ніж на 6%. Штриховими лініями на малюнках зображено криві, побудовані за асимптотичними формулами (4.57) і (4.58) для швидкої і повільної мод, - вони позначені трикутниками і хрестами, відповідно. За умов рис. 4.6 точність асимптотичної формули (4.59) для частоти  $\omega_0$  складає 12%.

Як видно, зокрема, з асимптотичної формули (4.57), мала поправка, яка обумовлена врахуванням аксіального хвильового числа, до частоти швидкої моди ХПТ, є квадратичною за  $k_z$  тільки у випадку, якщо діелектрична проникливість  $\varepsilon_d \neq 1$ . Сімейство дисперсійних кривих для ХПТ, що поширюються з азимутальним номером моди  $m=2$  у хвильоводах з різними діелектричними властивостями шару, представлено на рис. 4.8. Значення інших параметрів хвильоводу обрані такими ж, як для рис. 4.6. Суцільна лінія відповідає випадку, коли плазманий стовп відокремлено від металевої стінки хвильоводу вакуумним шаром ( $\varepsilon_d=1$ ). Як видно, при цьому існує тільки швидка мода, і дисперсійна залежність ХПТ характеризується тільки позитивною дисперсією. Поведінка дисперсійної кривої при  $\varepsilon_d=1$  якісно збігається з тим, що наведено в [110] для випадку плазмного хвильоводу, який поміщено в слабе аксіальне магнітне поле й оточено вакуумним шаром, і в [73] – для випадку коаксіального плазмного шару у вакуумі. Повільна мода з'являється тільки при  $\varepsilon_d > 1$ . Штрихова лінія на рис. 4.8 побудована для умов діелектричного шару з  $\varepsilon_d=1.05$ . У випадку, коли діелектрична стала слабо відрізняється від одиниці, дисперсійна крива швидкої моди містить ділянку з позитивною,  $\partial\omega_+/\partial k_z > 0$ , дисперсією (при малих значеннях  $k_z < 0.5k_0$ ) і ділянку з негативною,  $\partial\omega_+/\partial k_z < 0$ , дисперсією при великих (близьких до  $k_0$ ) значеннях аксіального хвильового числа. Тобто для швидкої моди при значенні  $\varepsilon_d$ , що мало відрізняється від одиниці, існує таке значення  $k_z \neq 0$ , при якому групова швидкість звертається в нуль. Іншими сло-

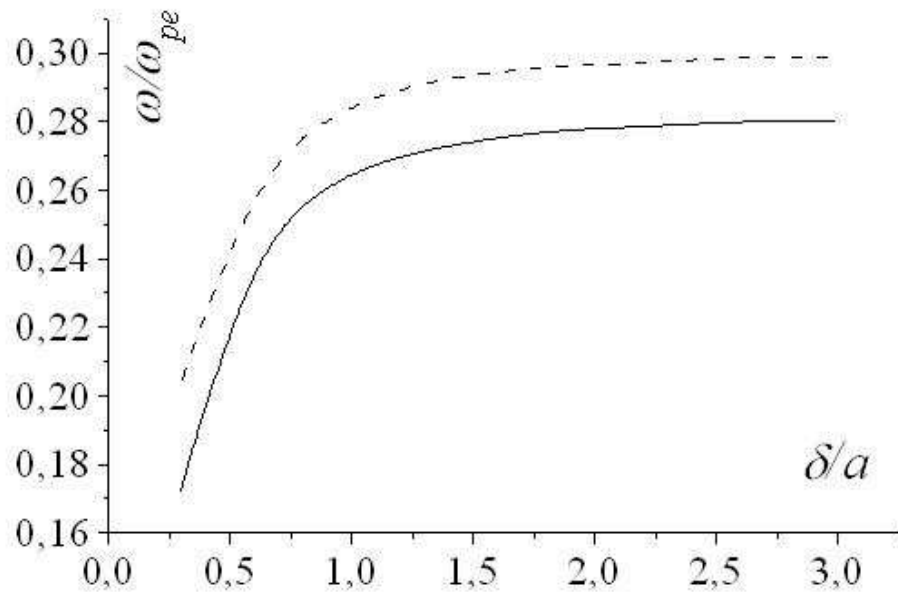


Рис. 4.9 Нормовані на ленгмюрівську частоту частоти ХПТ (суцільна лінія) і АПХ (штрихова лінія) як функції кривизни межі плазма – діелектрик, помноженої на глибину скін - шару, у випадку  $m=2$ ,  $\varepsilon_d=2$ .

вами, для будь-якого значення номера азимутальної моди  $m$  і радіуса хвильоводу можна підібрати таке значення  $\varepsilon_d$ , близьке до одиниці, при якому ХПТ із  $k_z \neq 0$  не буде переносити енергію в аксіальному напрямку. Пунктирна лінія на рис. 4.8 відповідає випадку  $\varepsilon_d=1.2$ . Ця крива характеризується дуже малою груповою швидкістю. Навіть при  $k_z a=0.5$  значення частоти  $\omega_+$  менше частоти  $\omega_+(k_z=0)$ , тобто менше частоти АПХ, тільки на одиницю в третьому знаку після коми. Як видно, уже при невеликих відмінностях  $\varepsilon_d$  від одиниці дисперсійна крива  $\omega_+$  не містить ділянки з позитивною дисперсією. При подальшому збільшенні проникливості  $\varepsilon_d$  діелектричного шару, коли  $\varepsilon_d$  уже не є занадто близькою до одиниці, дисперсійна залежність швидкої моди характеризується тільки негативною дисперсією,  $\partial\omega_+/\partial k_z < 0$ . Наприклад, штрих – пунктирну лінію на рис. 4.8 побудовано для випадку  $\varepsilon_d=1.4$ . Якісне поведіння цієї кривої вже практично не відрізняється від залежності, представлені на рис. 4.6 і 4.7 для випадку  $\varepsilon_d=2$ .

На рис. 4.9 суцільною лінією показано числовий розв'язок дисперсійного рівняння як залежність власної частоти ХПТ, нормованої на ленгмюрівську частоту

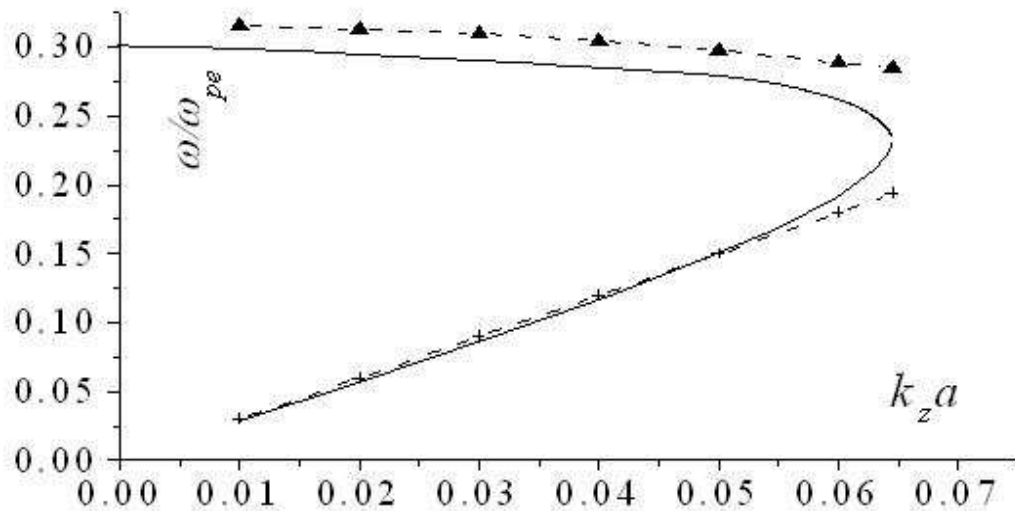


Рис. 4.10 Частота ХПТ, нормована на ленгмюрівську частоту, як функція аксіального хвильового числа, помноженого на радіус плазмового стовпа, у випадку вузького хвильоводу:  $m=2$ ,  $\varepsilon_d=2$ . Суцільна і пунктирна лінії побудовані, відповідно, за результатами чисельного розв'язання дисперсійного рівняння (4.38) і аналітичними формулами (4.62) і (4.63).

ту, від кривини  $l/a$  межі поділу плазма - діелектрик, помноженої на глибину скін-шару. Значення аксіального хвильового числа було фіксовано,  $k_z \delta = 0.15$ . Інші параметри мають ті ж значення, що і для рис. 4.6. Штриховою лінією для порівняння показано аналогічну залежність для АПХ ( $k_z=0$ ).

Результати чисельного розв'язання дисперсійного рівняння для ХПТ у тонкому хвильоводі,  $\delta/a=3$ , наведено на рис. 4.10 суцільною лінією. Штриховими лініями на рисунку зображено криві, побудовані за асимптотичними формулами (4.62) і (4.63) для швидкої і повільної мод, - вони позначені трикутниками і хрестами, відповідно. Значення інших параметрів обрано такими ж, як для рис. 4.6. Інтервал значень добутку  $k_z a$ , для якого хвиля має поверхневий характер, у цьому випадку виявився на порядок меншим, ніж для умов рис. 4.6, коли хвильовід вважався широким.

Тепер побудуємо електродинамічну модель газового розряду на ХПТ і приведемо результати аналітичних розрахунків ефективності передачі енергії АПХ до



газорозрядної плазми в режимах високого і низького тиску робочого газу. У першому випадку основним механізмом є омічна дисипація, як це і буває для поверхневих хвиль інших типів [84, 86].

Нехтуючи радіальною неоднорідністю плазми, для полів АПХ із рівнянь Максвелла можна одержати такі вирази:

$$B_z = A_2 I_m(k_{\perp} r), \quad E_r = -\frac{N_g A_2 I_m(k_{\perp} r)}{\varepsilon_p}, \quad E_g = \frac{i\omega A_2 I'_m(k_{\perp} r)}{ck_{\perp}}, \quad (4.67)$$

де  $A_2$  - нормувальний множник,  $k_{\perp}$  визначено формулою (4.2). Тоді для усереднених за радіусом значень потоку  $S_{\phi}$  енергії АПХ і кількості її енергії  $Q_{oh}$ , що поглинається плазмою за одиницю часу на одиницю довжини розряду, одержуємо в граничному випадку вузького хвилеводу,  $a \ll m\delta$ :

$$S_g \cong \frac{A_2^2 \omega \delta^2}{8\pi (m!)^2 4^m} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{2m}, \quad Q_{oh} \cong \frac{\nu \Omega_e^2 m A_2^2 \delta^2}{4\pi \omega^2 (m!)^2 4^m} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{2m}, \quad (4.68)$$

де  $\nu$  - ефективна частота зіткнень частинок плазми,  $\delta$  - глибина скін - шару.

При зниженні тиску робочого газу величина  $\nu$  зменшується, а разом із нею і ефективність омічного каналу дисипації енергії, тому варто шукати інші канали передачі енергії і врахувати реально існуючу радіальну неоднорідність плазми в розряді. Основним механізмом при цьому стає резонансне загасання АПХ внаслідок її конверсії в плазмову моду на периферії неоднорідної плазми, де  $\varepsilon_p(r^*) = 0$ . Тоді в перехідному шарі основним компонентом поля АПХ є радіальне електричне поле:

$$E_r^{(neod)} = \frac{N_g I_m(a/\delta)}{|\varepsilon_p(r)|} A_2. \quad (4.69)$$

Кількість енергії АПХ, що поглинається в резонансний спосіб, при цьому визначається наступною формулою:

$$Q_{res} \cong \frac{c^2 m^2 I_m^2(a/\delta) A_2^2}{8\omega a} \left| \frac{dr^*}{d\varepsilon_p} \right|. \quad (4.70)$$

Виконаємо числові оцінки кількості енергії АПХ, що поглинається в режимах з високим і низьким тиском. При цьому виберемо наступні значення парамет-

рів розряду: густина плазми  $n_p = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ , частота генератора  $f = 2.45 \text{ ГГц}$ , температура електронів  $T_e = 1 \text{ еВ}$ ,  $\nu = 10^8 \text{ с}^{-1}$ , - які є характерними для випадку сучасних [84] розрядів на різного типу поверхневих хвилях. У результаті одержимо наступну частку кількості енергії АПХ, що поглинається в різних режимах:

$$\frac{Q_{oh}}{Q_{res}} \cong \frac{0,078}{m} a, \quad (4.71)$$

де  $a$  слід підставляти в см. Зі співвідношення (4.71) видно, що для розрядної камери з  $a = 10 \text{ см}$  уже використання АПХ із  $m = 2$  призведе до того, що резонансне загасання буде служити основним каналом передачі енергії в плазму. Важливо також зазначити, що при цьому кутова довжина розряду  $\varphi_0$ , яку можна обчислити з рівняння балансу енергії

$$dS_\varphi/d\varphi = -Q, \quad (4.72)$$

виявляється досить великою,  $\varphi_0 \approx 10 a m^{-2}$ . Тому можна вважати плазму, яка підтримується в розряді, достатньо однорідною в азимутальному напрямку. За фізичним змістом  $\varphi_0$  – це кут, на якому потік енергії хвилі зменшується в “ $e$ ” разів [85].

Наведеними результатами в першому наближенні можна користуватися і при розрахунку розрядів на довгохвильових несиметричних поверхневих модах, беручи до уваги наявність у дисперсії цих хвиль таких діапазонів  $k_z$ , де їхня групова швидкість є близькою до нуля, оскільки в цьому випадку перенос енергії в аксіальному напрямку практично відсутній.

Підіб’ємо підсумки. У цьому підрозділі теоретично показано, що в циліндричних металевих хвилеводах, які частково заповнено плазмою без магнітного поля, є можливим поширення ХПТ із довільним значенням азимутального номера моди  $m$  і малим значенням аксіального хвильового числа, що визначається умовою:  $k_z^2 < \epsilon_d \omega^2 / c^2$ . Отримано дисперсійне рівняння (4.38) для цих хвиль у випадку неоднорідного радіального профілю густини плазми. Виконано аналітичні і числові дослідження цього рівняння у випадку однорідного профілю густини. Показано гарний збіг результатів числового розв’язання дисперсійного рівняння й аналітичних виразів для власної частоти.

Установлено, що в загальному випадку, коли діелектрична проникливість шару  $\varepsilon_d$  не є занадто близькою до одиниці, наявність скінченного значення аксіального хвильового числа  $k_z$  у ХПТ призводить до зниження частоти швидкої моди в порівнянні з випадком АПХ і появі другого, принципово нового розв'язку, якого не було у випадку АПХ, а саме – повільної моди. Частота повільної моди практично є пропорційною величині аксіального хвильового числа. Показано, що групова швидкість швидкої моди за абсолютною величиною є істотно меншою за групову швидкість повільної моди для всіх аксіальних хвильових чисел, за винятком тих, що є близькими до  $k_0$ . Більше того, якщо діелектрична проникливість діелектричного шару слабо відрізняється від одиниці, то перенесення енергії швидкої моди ХПТ уздовж осі хвилеводу практично дорівнює нулю в значному діапазоні аксіальних хвильових чисел.

Знайдено граничні значення аксіального хвильового числа  $k_z=k_0$  (див. таблицю 4.1 і рис. 4.6, 4.7, 4.8, 4.10), при перевищенні яких поля даного електромагнітного збурення вже не зменшуються монотонно при віддаленні від межі поділу плазма – діелектрик у глибину плазми, тобто коли вже немає підстав вважати це збурення поверхневим. Обчислено аналітичні вирази для відповідних значень частоти  $\omega_0$  ХПТ і дано фізичне пояснення того, що поблизу  $\omega_0$  групова швидкість ХПТ необмежено зростає.

Як показано в цьому підрозділі, частота ХПТ є меншою за частоту АПХ за інших рівних умов, якщо діелектрична проникливість шару не є занадто близькою до одиниці. У цьому полягає якісна відмінність здобутих результатів від результатів роботи [74], у якій було отримане зростання частоти ХПТ у порівнянні з частотою АПХ у випадку вакуумного шару. (У роботі [74] досліджено поширення ХПТ у плазмовому стовпі, який поміщено в слабе магнітне поле і відокремлено від металевої камери скінченням вакуумним шаром. Дисперсійні властивості ХПТ вивчено там тільки для окремих значень азимутального номера моди  $m$  і тільки числовими методами.)

У цьому підрозділі також наведено результати аналітичних розрахунків електродинамічної моделі джерела плазми, що використовує поширення АПХ для

підтримання розряду. При цьому відзначене зменшення частоти ХПТ, яке здобуто в даному підрозділі, представляється зручним для використання цих мод з метою підтримання газового розряду. Це пояснюється тим, що збурення з меншими фазовими швидкостями краще взаємодіють з частинками газорозрядної плазми, передаючи їм свою енергію. Обчислено усереднені за радіусом значення потоків енергії АПХ і їхньої потужності, що поглинається плазмою в режимах омічної дисипації і резонансної конверсії енергії АПХ. Оскільки в сучасних плазмових технологіях [84] використовується в основному режим низького тиску робочого газу, то основним каналом передачі енергії АПХ до плазми буде, звичайно, її конверсія в плазмову моду. При цьому розряд буде характеризуватися досить однорідним профілем уздовж азимутального кута, що є дуже важливим для практичного використання таких розрядів у сучасних плазмових технологіях.

електродинамічної моделі джерела плазми, що використовує поширення АПХ для підтримання розряду. При цьому відзначене зменшення частоти ХПТ, яке здобуто в даному підрозділі, представляється зручним для використання цих мод з метою підтримання газового розряду. Це пояснюється тим, що збурення з меншими фазовими швидкостями краще взаємодіють з частинками газорозрядної плазми, передаючи їм свою енергію. Обчислено усереднені за радіусом значення потоків енергії АПХ і їхньої потужності, що поглинається плазмою в режимах омічної дисипації і резонансної конверсії енергії АПХ. Оскільки в сучасних плазмових технологіях [84] використовується в основному режим низького тиску робочого газу, то основним каналом передачі енергії АПХ до плазми буде, звичайно, її конверсія в плазмову моду. При цьому розряд буде характеризуватися досить однорідним профілем уздовж азимутального кута, що є дуже важливим для практичного використання таких розрядів у сучасних плазмових технологіях.

#### 4.3. Довгохвильові несиметричні поверхневі хвилі

в магнітоактивних циліндричних хвилеводах, повністю заповнених плазмою

Дисперсійні властивості електромагнітних хвиль, що поширюються строго уздовж азимута поперек зовнішнього магнітного поля в циліндричних плазмових хвилеводах, повністю заповнених плазмою з однорідним радіальним профілем густини, також названих АПХ, досліджено в [120] і на потенційній границі – у [92]. Вплив малих аксіальних хвильових чисел на дисперсійні властивості поверхневих електромагнітних хвиль на межі циліндрична плазма - метал раніше не було досліджено. Для довільних значень параметрів магнітоплазмової системи, азимутального хвильового числа  $m$  і аксіального хвильового числа  $k_z$  дисперсійні властивості ХПТ можуть бути досліджені тільки числовими методами. А в діапазоні великих аксіальних довжин хвиль ця задача допускає розв'язання в рамках теорії збурень, причому роль нульового наближення грають АПХ [120]. У цьому підрозділі теоретично досліджено дисперсійні властивості електромагнітних поверхневих хвиль з довільними значеннями азимутального номера моди і малим зна-

ченням аксіального хвильового числа, що поширюються в циліндричних металевих хвилеводах, які повністю заповнено холодною магнітоактивною радіально неоднорідною плазмою [164]. Визначено частотні діапазони існування досліджуваних хвиль. Визначено умови резонансної взаємодії поверхневої незвичайної й об'ємної звичайної мод. Вивчено залежність власної частоти хвиль від параметрів плазми, а також від значень аксіального хвильового числа й азимутального номера моди. Отримано наочні аналітичні вирази для власних частот зазначених мод, що поширюються в однорідній плазмі.

Нехай круглий циліндричний металевий ідеально провідний хвилевод радіуса  $a$  буде цілком заповнений плазмою, яку вважаємо однорідною уздовж осі  $z$  і за азимутальним кутом  $\vartheta$  (у циліндричних координатах). Зовнішнє магнітне поле спрямоване уздовж осі хвилеводу, тобто  $\vec{H}_0 \parallel \vec{z}$ . Радіальна залежність полів електромагнітної хвилі  $\propto \exp[i(k_z z + m\vartheta - \omega t)]$  визначається рівняннями Максвелла,

$$\varepsilon_1 E_r + i\varepsilon_2 E_\vartheta = -N_\vartheta B_z + N_z B_\vartheta; \quad (4.73)$$

$$-i\varepsilon_2 E_r + \varepsilon_1 E_\vartheta = -N_z B_r + \frac{c}{i\omega} \frac{\partial B_z}{\partial r}; \quad (4.74)$$

$$\varepsilon_3 E_z = \frac{ic}{\omega r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\vartheta) + N_\vartheta B_r; \quad (4.75)$$

$$B_r = N_\vartheta E_z - N_z E_\vartheta; \quad (4.76)$$

$$B_\vartheta = N_z E_r - \frac{c}{i\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r}; \quad (4.77)$$

$$B_z = \frac{c}{i\omega r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\vartheta) - N_\vartheta E_r. \quad (4.78)$$

У випадку АПХ, що поширюються точно за азимутальним кутом ( $k_z=0$ ), система рівнянь (4.73) - (4.78) розпадається на дві підсистеми. Одна з них, що складається з рівнянь (4.75), (4.76) і (4.77), описує в цьому випадку  $H$  - хвилю з компонентами поля  $E_z$ ,  $B_r$ ,  $B_\vartheta$ . Інші рівняння (4.73), (4.74) і (4.78) описують  $E$  - хвилю з компонентами поля  $E_r$ ,  $E_\vartheta$ ,  $B_z$ . Таким чином,  $E$ - і  $H$ - моди АПХ поширюються незалежно. У випадку довгохвильових ХПТ із малим, але скінченним аксіальним хвильовим числом  $k_z$   $E$  - хвиля і  $H$  - хвиля виявляються слабо зв'язаними. Для ви-

вчення дисперсійних властивостей таких хвиль застосуємо теорію збурень, виконавши за нульове наближення теорію АПХ [120].

Обмежимося дослідженням випадку густої плазми, у якій  $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ . Така умова завжди виконується для  $n$  - напівпровідникової плазми, але вона може бути реалізована й у лабораторній газовій плазмі у випадку слабкого магнітного поля. Саме такий граничний випадок становить найбільший інтерес для плазмових технологій [84]. Нагадаємо також, що дисперсійні властивості АПХ у замагнічених,  $\omega_{pe}^2 < \omega_{ce}^2$ , циліндричних плазмових хвилеводах досліджено в підрозділі 4.1.

Поля ХПТ задовольняють наступним крайовим умовам: амплітуди полів хвилі обмежені в об'ємі хвилеводу; тангенціальна складова електричного поля звертається в нуль на внутрішній поверхні металевої камери.

Здобудемо дисперсійне рівняння для довгохвильових ХПТ у радіально неоднорідній плазмі. Якщо знехтувати доданками другого і більш високого порядку малості за аксіальним хвильовим числом  $k_z$ , то рівняння (4.73) - (4.78) можна звести до двох диференціальних рівнянь другого порядку для аксіальних компонентів електричних і магнітних полів у радіально неоднорідній плазмі,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B_z}{\partial r} - \left[ 1 + \frac{m^2}{r^2 k_H^2} - \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{k_H^2} \right) \right] B_z = \hat{K} E_z; \quad (4.79)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E_z}{\partial r} - \left( k_0^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) E_z = \hat{M} B_z. \quad (4.80)$$

Малі праві частини (4.79) і (4.80) мають наступний вигляд,

$$\hat{K} E_z = i N_z \left\{ \frac{m}{r} E_z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{k_H^2} \right) + \frac{\mu k_0^2}{k_H^2} E_z + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{k_H^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\}, \quad (4.81)$$

$$\hat{M} B_z = i N_z \left\{ \frac{1}{N_H^2} \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \mu + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{N_H^2} \right) - \frac{\mu m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{N_H^2} \right) \right] B_z \right\}. \quad (4.82)$$

Глибини проникнення  $H$  - хвилі (звичайно поляризованої)  $k_0^{-1}$  і  $E$  - хвилі (незвичайно поляризованої)  $k_H^{-1}$  визначаються через компоненти тензора  $\varepsilon_{ik}$ ,

$$k_0^2 = -(\omega/c)^2 \varepsilon_3, \quad k_H^2 = (\omega/c)^2 N_H^2, \quad N_H^2 = (\varepsilon_I - N_z^2)(\mu^2 - 1), \quad \mu = \varepsilon_2/(\varepsilon_I - N_z^2). \quad (4.83)$$

Систему «нерозщеплених» рівнянь для поздовжніх компонентів електрома-

гнітного поля  $E_z$  і  $B_z$  для випадку довільних значень  $k_z$  і радіально однорідної плазми в аксіальному магнітному полі було отримано в [225].

Розв'язок рівнянь (4.79) і (4.80) знаходимо методом варіації сталої,

$$B_z = \left( A_2 - A_1 \int_a^r \frac{\tilde{\psi} k_H^2 \hat{K} \phi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} \right) \psi + A_1 \tilde{\psi} \int_0^r \frac{\psi k_H^2 \hat{K} \phi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})}, \quad (4.84)$$

$$E_z = \left( A_1 - A_2 \int_a^r \frac{\tilde{\phi} \hat{M} \psi dr}{W(\phi, \tilde{\phi})} \right) \phi + A_2 \tilde{\phi} \int_0^r \frac{\phi \hat{M} \psi dr}{W(\phi, \tilde{\phi})}. \quad (4.85)$$

Тут  $\psi(r)$  і  $\phi(r)$  - обмежені на осі циліндра (при  $r=0$ ) розв'язки рівнянь (4.79) і (4.80) відповідно з нульовою правою частиною, а  $\tilde{\psi}(r)$  і  $\tilde{\phi}(r)$  - лінійно незалежні від  $\psi$  і  $\phi$  розв'язки цих рівнянь. Розв'язки (4.84) і (4.85) містять дві константи інтегрування  $A_1$  і  $A_2$ , оскільки дві інші ми визначили з умови обмеженості полів  $E_z$  і  $B_z$  на осі хвилеводу, де  $\tilde{\phi}$  і  $\tilde{\psi}$  мають особливості. Вронскіан функцій  $\psi(r)$  і  $\tilde{\psi}(r)$  дорівнює,

$$W(\psi, \tilde{\psi}) = \psi \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} - \tilde{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \propto \frac{k_H^2}{r}, \quad (4.86)$$

вронскіан функцій  $\phi(r)$  і  $\tilde{\phi}(r)$  є зворотно пропорційним до координати  $r$ ,

$$W(\phi, \tilde{\phi}) = \phi \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} - \tilde{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \propto \frac{1}{r}. \quad (4.87)$$

Відповідно до системи рівнянь (4.73) - (4.78) азимутальний компонент електричного поля виражається через  $E_z$  і  $B_z$  у такий спосіб (див., наприклад, [75]),

$$E_\theta = \frac{ic}{\omega N_H^2} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{i\mu N_g}{N_H^2} B_z + \frac{N_z N_g}{N_H^2} E_z + \frac{\mu N_z c}{\omega N_H^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (4.88)$$

Накладення крайових умов на поля  $E_\theta$  і  $E_z$  на внутрішній поверхні металевого хвилеводу дозволяє записати дисперсійне рівняння довгохвильових ХПТ у наступному виді,

$$A_{12}A_{21} = A_{11}A_{22}, \quad (4.89)$$

де

$$A_{21} = \phi(a), \quad (4.90)$$



$$A_{11} = \left\{ \frac{ic}{\omega N_H^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \int_0^a \frac{\psi k_H^2 \hat{K} \phi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} + \frac{i\mu N_g}{N_H^2} \tilde{\psi} \int_0^a \frac{\psi k_H^2 \hat{K} \phi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} + \frac{N_z N_g}{N_H^2} \phi + \frac{\mu N_z c}{\omega N_H^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\}_{|r=a}, \quad (4.91)$$

$$A_{12} = \left\{ \frac{ic}{\omega N_H^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\mu N_g}{N_H^2} \psi \right\}_{|r=a}, \quad (4.92)$$

$$A_{22} = \tilde{\phi}(a) \int_0^a \frac{\phi \hat{M} \psi dr}{W(\phi, \tilde{\phi})}. \quad (4.93)$$

Слід зазначити, що з одного боку, дисперсійне рівняння (4.89) є узагальненням дисперсійного рівняння, отриманого в [120], на випадок малих  $k_z$ , а з іншого боку - є частинним випадком загального дисперсійного рівняння, отриманого в [73] для визначення спектру власних частот коаксіального плазмового хвильоводу в скінченному магнітному полі. Обговоримо структуру дисперсійного рівняння (4.89). Вона є аналогічною до структури дисперсійного рівняння слабо зв'язаних коливань. У цій схемі умова  $A_{12}=0$  відіграє роль дисперсійного рівняння незвичайних АПХ ( $E$  - хвилі), розв'язок якого  $\omega_0$  вважаємо відомим. Знакоперемінність саме множника  $A_{12}$  в межах частотних діапазонів існування досліджуваних хвиль, визначених у [120] для випадку АПХ, забезпечує існування розв'язку рівняння (4.89). Умова  $A_{21}=0$  представляла б собою дисперсійне рівняння звичайних АПХ ( $H$  - хвилі), але воно має розв'язки тільки у вигляді об'ємних хвиль. Права частина дисперсійного рівняння (4.89) є квадратичною за малим аксіальним хвильовим числом  $k_z$ , яке відіграє роль параметра слабого зв'язку між  $E$ - і  $H$ - хвилями. Ці обставини дають підстави зробити висновок, що поправка  $\Delta\omega$  до власної частоти довгохвильових ХПТ є квадратичною за аксіальним хвильовим числом,  $\Delta\omega \propto k_z^2$ . Підкреслимо, що аксіальне хвильове число входить також до лівої частини дисперсійного рівняння (4.89) через глибину  $k_H^{-1}$  проникнення ХПТ до плазми.

Подальший розгляд проведемо для випадку однорідного радіального профілю густини. Таке обмеження виправдовується наступним. По-перше, ця модель добре описує випадок твердотільної плазми. По-друге, радіальною неоднорідністю густини можна знехтувати, якщо густина слабо змінюється на відстанях порядку глибини проникнення хвилі до плазми. А у випадку підтримання газового

розряду поверхневою хвилею однорідність густини забезпечується саме на відстанях порядку глибини проникнення хвилі до плазми.

У випадку радіально однорідної плазми рівняння (4.79) і (4.80) для  $E_z$  і  $B_z$  являють собою неоднорідні рівняння Бесселя. Розв'язки відповідних однорідних рівнянь, обмежені на осі хвилеводу, виражаються через модифіковані функції Бесселя,

$$\psi = I_m(kr), \quad \varphi = I_m(k_0 r). \quad (4.94)$$

Лінійно незалежні від них розв'язки рівнянь (4.79) і (4.80) – це функції Макдональда,

$$\tilde{\psi} = K_m(k_H r), \quad \tilde{\varphi} = K_m(k_0 r). \quad (4.95)$$

Розв'язки (4.94) і (4.95) можна застосовувати, якщо  $k_0^2 > 0$  і  $k_H^2 > 0$ . Саме умова  $k_H^2 > 0$  визначає частотні діапазони існування ХПТ, що на границі  $k_z = 0$  збігаються з діапазонами існування АПХ [120]: ХПТ із позитивними азимутальними номерами  $m$  поширюються в діапазоні, який називатимемо в цьому підрозділі низькочастотним (НЧ),

$$|\omega_{ce}| \sqrt{\frac{\omega_{pi}^2 + c^2 k_z^2}{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}} < \omega < |\omega_{ce}|, \quad (4.96)$$

а з негативними азимутальними номерами  $m$  – у діапазоні, який називатимемо в цьому підрозділі високочастотним (ВЧ),

$$\sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 + c^2 k_z^2} < \omega < 0.5 |\omega_{ce}| + \sqrt{0.25 \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 + c^2 k_z^2}. \quad (4.97)$$

Така властивість поверхневих хвиль, поширюватися тільки в одному напрямку поперек зовнішнього магнітного поля, добре відома для хвилеводів із межею плазма – метал [92, 115]. Вона називається односпрямованістю і може бути дуже корисною у різних радіотехнічних пристроях, де необхідно забезпечити відсутність відбитого сигналу.

Величина  $k_0^2$  має різні знаки в діапазонах (4.96) і (4.97): так, у НЧ діапазоні  $k_0^2 > 0$ , а у ВЧ діапазоні вона стає негативною,  $k_0^2 < 0$ .

Дослідимо спочатку низькочастотні довгохвильові ХПТ в однорідному плазмовому хвилеводі. У випадку однорідного профілю густини вирази (4.81) і (4.82)

для правих частин рівнянь (4.79) і (4.80) помітно спрощуються,

$$\hat{K}E_z = -iN_z \frac{\mu\epsilon_3}{N_H^2} E_z ; \quad \hat{M}B_z = iN_z \mu \frac{\omega^2}{c^2} B_z. \quad (4.98)$$

При цьому дисперсійне рівняння (4.89) записується в наступному явному вигляді,

$$A_{11} = N_z \mu k_0^2 a Q \left[ \frac{1}{N_H} K'_m(k_H a) + \frac{\mu N_g}{N_H^2} K_m(k_H a) \right] + \frac{N_z N_g}{N_H^2} I_m(k_0 a) + \frac{\mu k_z k_0}{k_H^2} I'_m(k_0 a), \quad (4.99)$$

$$A_{12} = \frac{i}{N_H^2} [N_H I'_m(k_H a) + \mu N_g I_m(k_H a)], \quad (4.100)$$

$$A_{21} = I_m(k_0 a), \quad (4.101)$$

$$A_{22} = -i \frac{\omega^2}{c^2} N_z \mu a K_m(k_0 a) Q, \quad (4.102)$$

$$Q = (k_0^2 - k_H^2) [k_0 I_m(k_H a) I'_m(k_0 a) - k_H I_m(k_0 a) I'_m(k_H a)]. \quad (4.103)$$

Врахування малого значення аксіального хвильового числа  $k_z$  призводить до появи ще одного (у порівнянні з випадком АПХ) розв'язка дисперсійного рівняння. Надалі в цьому підрозділі цей розв'язок будемо називати повільною модою. Для НЧ діапазону її частота  $\omega_-$  практично є пропорційною до величини  $k_z$ , тобто величина  $\omega_-$  прагне до частоти відсічення при  $k_z \rightarrow 0$  (див. рис. 4.11). Групова швидкість повільної моди завжди позитивна,  $\partial\omega_-/\partial k_z > 0$ , і за модулем перевершує абсолютне значення групової швидкості швидкої моди.

Про швидку моду можна сказати наступне. Як і для випадку немагнітоактивної плазми, її частота  $\omega_+$  на границі, при  $k_z \rightarrow 0$ , переходить у частоту АПХ. Дисперсійна крива швидкої моди містить при дуже малих значеннях  $k_z$  ділянку з позитивною дисперсією,  $\partial\omega_+/\partial k_z > 0$ . При цьому врахування малого значення аксіального хвильового числа призводить до невеликого підвищення частоти ХПТ у порівнянні з частотою АПХ. Це дозволяє обчислити частоту швидкої моди ХПТ методом послідовних наближень у вигляді  $\omega_+ = \omega_0 + \Delta\omega$ , використавши за нульове наближення теорію АПХ [120]. Тобто, величина  $\omega_0$  являє собою частоту АПХ у

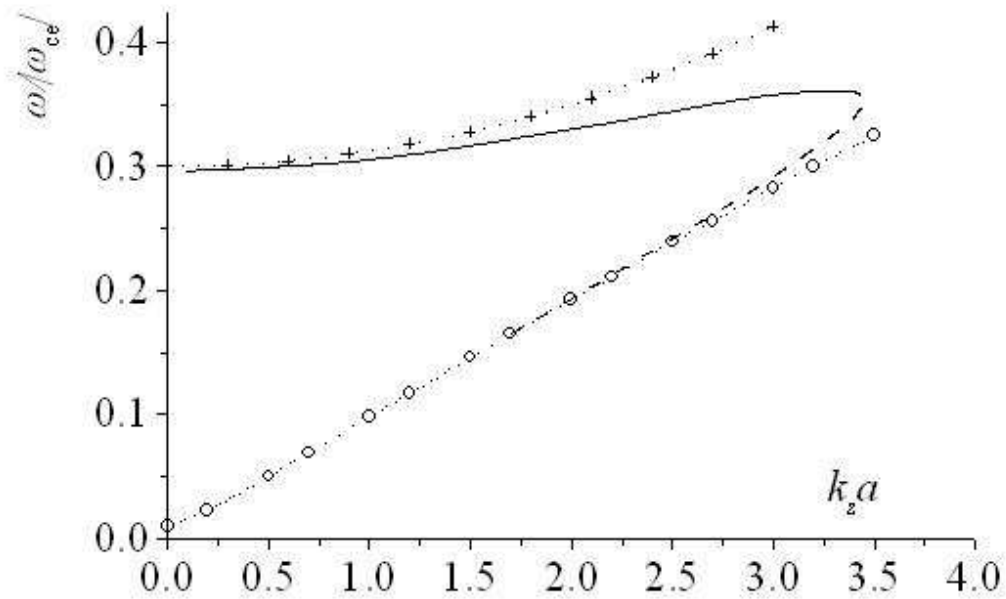


Рис. 4.11 Залежність частоти, нормованої на модуль електронної циклотронної частоти, незвичайно поляризованої хвилі в НЧ діапазоні від аксіального хвильового числа, помноженого на радіус хвилеводу. Азимутальний номер моди  $m=3$ ,  $\omega_{pe}=5|\omega_{ce}|$ ,  $a=10\delta$

розглянутому хвилеводі. Мала поправка  $\Delta\omega$  до частоти виявляється при цьому квадратичною за  $k_z$ ,

$$\Delta\omega = \left( \frac{A_{11}A_{22}}{A_{21}} - \frac{\partial A_{12}}{\partial k_z^2} \Big|_{\omega=\omega_0} k_z^2 \right) \left[ \frac{\partial A_{12}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right]^{-1} \propto k_z^2. \quad (4.104)$$

Прості аналітичні розв'язки дисперсійного рівняння (4.89) вдається здобути в двох граничних випадках, а саме, у широких,  $a \gg |m|\delta$ , і вузьких,  $a \ll |m|\delta$ , хвилеводах для ХПТ із даним  $m$ . Для зручності результати аналітичного дослідження зведено в таблицю 4.2.

З аналізу виразів (4.106) і (4.108) дістаємо, що теорію послідовних наближень можна застосовувати для вивчення дисперсійних властивостей швидкої моди довгохвильових НЧ ХПТ у досить широкому діапазоні аксіальних хвильових чисел. У випадку широких хвилеводів цей діапазон визначається наступною нерівністю:

$$k_z^2 < 8(m/a)^2, \quad (4.109)$$

Таблиця 4.2

Величина	Границя $a \ll  m  \delta$	Границя $a \gg  m  \delta$
$\omega_0 \approx$	$ \omega_{ce}  \left( 1 - \frac{a^2}{2m(m+1)\delta^2} \right) \quad (4.105)$	$ \omega_{ce}  m \delta / a \quad (4.107)$
$\Delta\omega \approx$	$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{2\delta(m+1)} \right)^2 \left( \frac{k_z a}{m} \right)^2 \omega_0 \quad (4.106)$	$(3/8)(k_z a/m)^2 \omega_0 \quad (4.108)$

У випадку вузьких хвильоводів діапазон застосовності аналітичного розв'язка стає ще ширшим,

$$k_z^2 \ll 8(m(m+1)\delta/a^2)^2. \quad (4.110)$$

При подальшому зростанні  $k_z$  частота  $\omega_+$  досягає максимуму, і далі спостерігається ділянка з негативною дисперсією,  $\partial\omega_+/\partial k_z < 0$  (див. рис. 4.11). Потім частоти швидкої і повільної мод наближаються одна до одної, і при певному значенні  $k_z = k_m$  обидві моди характеризуються однаковою частотою  $\omega_m$ . Дістаємо, що для ХПТ із частотами, які є близькими до  $\omega_m$ , групова швидкість ХПТ  $\partial\omega/\partial k_z$  необмежено зростає, і поняття групової швидкості втрачає зміст. Для ХПТ із частотою й аксіальним хвильовим числом, які є близькими до  $\omega_m$  і  $k_m$ , відповідно, обране тут представлення електромагнітного збурення у вигляді однієї гармоніки  $\propto \exp[i(k_z z + m\vartheta - \omega t)]$  є некоректним. Якщо поблизу обговорюваної точки на дисперсійній кривій залежність  $k_z(\omega)$  приблизно описати квадратичною параболою,

$$k_z(\omega) = k_m - (\omega - \omega_m)^2 / \alpha, \quad (4.111)$$

де  $k_m = k_z(\omega_m)$ ,  $\alpha$  - певна константа, що має розмірність прискорення  $m/c^2$ , тоді електромагнітний імпульс  $\propto \exp[-t^2/(2\tau^2)] \cos(k_m z - \omega_m t)$  тривалістю  $\tau$  розпливається на аксіальних відстанях порядку  $\alpha\tau^2/2$  від точки, де він був сформований.

Порівняємо здобуті аналітичні результати дослідження дисперсійного рівняння (4.89) з результатами його числового розв'язання. На рис. 4.11 представлено залежність  $\omega(k_z)$  для ХПТ із НЧ діапазону (4.96). Обрано наступні значення параметрів хвилі і плазмового стовпа:  $m=3$ ,  $\omega_{pe}=5|\omega_{ce}|$ ,  $a=10\delta$ . Як уже відзначалося,

застосовність нашого розгляду обмежена в цьому випадку значенням добутку  $k_z a$ , для якого має виконуватись нерівність  $k_z a < m$ . Суцільною лінією зображено дисперсійну криву швидкої моди, штриховою лінією – повільної моди. Пунктирна лінія, яка позначена кільцями, указує границю частотного діапазону (4.96). Пунктирну лінію, яку позначена хрестами, побудовано за асимптотичними формулами (4.107) і (4.108).

Тут не наведено дисперсійної кривої для випадку вузького хвильоводу, оскільки в цьому випадку залежність  $\Delta\omega(k_z)$  виражена дуже слабо (див. (4.106)).

Дослідимо тепер випадок високочастотних довгохвильових ХПТ в однорідному плазмовому хвильоводі. У ВЧ діапазоні (4.97) реалізуються умови для поширення об'ємних  $H$  - хвиль. При цьому розв'язок рівняння (4.80) з нульовою правою частиною вибираємо у вигляді

$$\varphi = J_m(k_l r), \quad \tilde{\varphi} = N_m(k_l r), \quad k_l^2 = -k_0^2 > 0, \quad (4.112)$$

де  $J_m$  – функція Бесселя і  $N_m$  – функція Неймана [226]. У дисперсійному рівнянні (4.89) для ВЧ ХПТ із негативними азимутальними номерами моди коефіцієнт  $A_{12}$  як і раніше визначається виразом (4.100), а інші коефіцієнти  $A_{ij}$  у цьому випадку дорівнюють відповідно

$$A_{11} = -N_z \mu k_l^2 Q_l \left[ \frac{K'_m(k_H a)}{N_H} + \mu \frac{N_g}{N_H^2} K_m(k_H a) \right] + \frac{N_z N_g}{N_H^2} J_m(k_l a) + \frac{\mu k_z k_l}{k_H^2} J'_m(k_l a), \quad (4.113)$$

$$A_{21} = J_m(k_l a), \quad (4.114)$$

$$A_{22} = \frac{i\pi}{2} \frac{\omega^2}{c^2} N_z \mu N_m(k_l a) Q_l, \quad Q_l = \int_0^a r J_m(k_l r) I_m(k_H r) dr. \quad (4.115)$$

Аналіз дисперсійного рівняння (4.89) показує, що у вузьких хвильоводах ВЧ АПХ не поширюються. Аналітична оцінка радіуса хвильоводу, у якому можуть існувати ВЧ АПХ, визначається наступною нерівністю,  $a/\delta > \omega_{pe}|m/\omega_{ce}|$ . Для ВЧ АПХ з азимутальним номером моди  $m = -2$  у випадку, коли  $\omega_{pe} = 3 |\omega_{ce}|$ , ця аналітична оцінка вказує, що ВЧ АПХ можуть поширюватися тільки в хвильоводах, радіус яких у шість разів більший за глибину скін – шару  $\delta$ . Числовий аналіз також показав, що дисперсійне рівняння АПХ,  $A_{12} = 0$ , має розв'язки при  $a > 5\delta$ , що підт-

верджує справедливість аналітичних розрахунків.

У широких хвильоводах власну частоту ВЧ АПХ можна приблизно визначити в такий спосіб,

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 + \left(m^2 c^2 / a^2\right)}. \quad (4.116)$$

Тоді для аргументу  $(k_1 a)$  функції Бесселя в коефіцієнті  $A_{2l}$  одержуємо значення

$$k_1 a \approx \left(m^2 + \omega_{ce}^2 a^2 / c^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.117)$$

Якщо прикладене магнітне поле і розміри хвильоводу не занадто великі, так що має місце нерівність:

$$a^2 \omega_{ce}^2 / c^2 < j_{|m|,s}^2 - m^2, \quad (4.118)$$

то власні об'ємні звичайні азимутальні хвилі в такому хвильоводі не поширюються. Тут  $j_{|m|,s}$  - значення  $s$ -го кореня функції Бесселя порядку  $|m|$ ,  $J_{|m|}(j_{|m|,s})=0$ . У цьому випадку поправка до частоти ВЧ ХПТ, яка обумовлена врахуванням скінченного аксіального хвильового числа, є позитивною,

$$\Delta\omega = 0.5 N_z^2 \omega_0 + 0.5 \pi |m| N_z^2 J'_{|m|} \left( \sqrt{m^2 + a^2 \omega_{ce}^2 / c^2} \right) N_{|m|} \left( \sqrt{m^2 + a^2 \omega_{ce}^2 / c^2} \right) \omega_0. \quad (4.119)$$

На рис. 4.12 наведено результати числового розв'язання дисперсійного рівняння (4.89) для ХПТ з азимутальним номером моди  $m = -2$ . По осях відкладені ті ж величини, що і на рис. 4.11. Межі частотного діапазону (4.97) показано пунктирною лінією з кільцями. Пунктирну лінію, яку позначено хрестами, побудовано за асимптотичними формулами (4.116) і (4.119). Відзначимо, що для обраних параметрів хвилі і плазми усі власні частоти об'ємної звичайної хвилі, які пораховано з умови:

$$k_1 a = j_{|m|,s}, \quad (4.120)$$

лежать вище частотного діапазону (4.97).

Представляється важливим спробувати зіставити результати, наведені у цьому підрозділі, з положеннями роботи [74], у якій проведено докладний числовий аналіз дисперсійних властивостей квадрупольних ( $m=\pm 2$ ) і октопольних ( $m=\pm 3$ ) мод ХПТ. У [74] числовими методами досліджено дисперсійні властивості ХПТ, у тому числі для хвильоводів з вузьким вакуумним шаром (аж до  $(a-a_{pl})=0.1a$ , де  $a_{pl}$

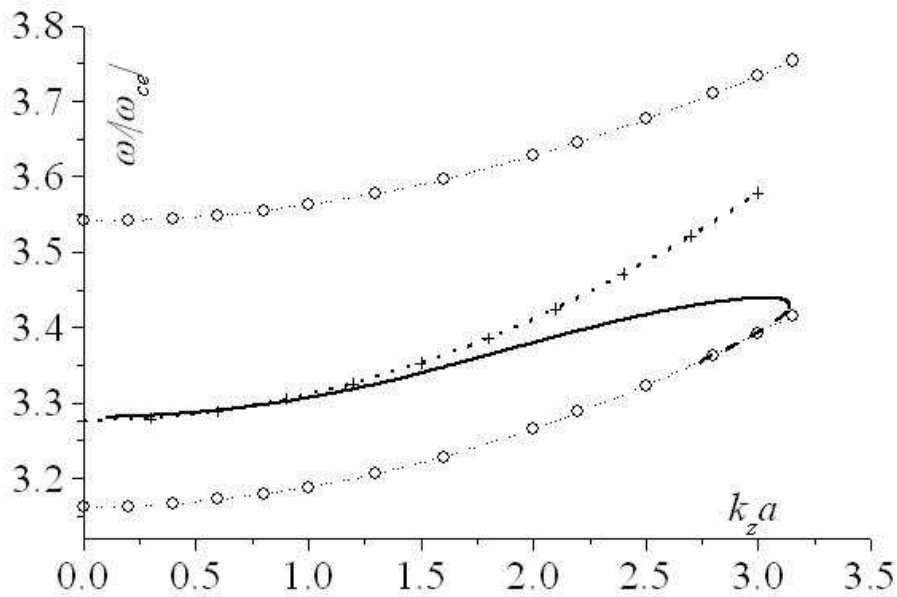


Рис. 4.12 Та сама залежність, що і на рис. 4.11, але у ВЧ діапазоні. Азимутальний номер моди  $m = -2$ ,  $\omega_{pe} = 3|\omega_{ce}|$ ,  $a = 7\delta$ .

— радіус плазмового циліндра) і для хвиль з малим аксіальним хвильовим числом (аж до  $k_z a = 0.1$ ). На перший погляд, у цьому випадку можна було б очікувати, що наведені в [74] дисперсійні властивості ХПТ виявляться близькими до властивостей АПХ на межі плазма - метал. Але, як показано в роботі [90], наявністю вакуумного шару між металевою стінкою хвилеводу і плазмою можна знехтувати тільки в тому випадку, якщо досліджуються дисперсійні властивості АПХ у хвилеводі з настільки вузьким шаром, що виконується наступна нерівність:

$$\sqrt{b-a} \ll |\omega_{ce}| \sqrt{a} / (2\sqrt{|m|}\omega_{pe}). \quad (4.121)$$

Незважаючи на великий обсяг виконаних у [74] числових розрахунків для різних ширин вакуумного шару, у жодному з них умова (4.121) не реалізується. Тому жоден із графіків, наведених у [74], не підходить для порівняння з результатами цієї роботи. Разом з тим, наведені в [74] результати числового розв'язання дисперсійного рівняння на довгохвильовій границі добре узгоджуються з результатами роботи А. Кондратенка із співавторами [90], де досліджені дисперсійні властивості АПХ за наявності вакуумного шару між плазмовим циліндром і металевою камерою.



Дослідимо резонансну взаємодію довгохвильових незвичайних ХПТ із об'ємними звичайними хвилями. Зі збільшенням радіуса  $a$  хвилеводу та/або магнітного поля можуть реалізуватися умови збігу власних частот незвичайної АПХ і звичайної азимутальної об'ємної хвилі. Ці умови можна оцінити з формули (4.118), якщо в ній знак нерівності замінити знаком рівності. За цих умов дисперсійне рівняння (4.89) набуває вигляду квадратного рівняння відносно поправки  $\Delta\omega$ ,

$$\left( \frac{\partial A_{12}}{\partial k_z^2} \Big|_{\omega=\omega_0} k_z^2 + \frac{\partial A_{12}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \Delta\omega \right) \frac{\partial A_{21}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \Delta\omega = A_{11} A_{22} . \quad (4.122)$$

При його розв'язанні можна знехтувати першим доданком у дужках у лівій частині рівняння (4.122), що є квадратичним за аксіальним хвильовим числом, у порівнянні з другим, який є лінійним за  $k_z$ , тоді розв'язок дисперсійного рівняння набуває вигляду  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ , де

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{pe}^2 + j_{|m|,s}^2 c^2 / a^2} , \quad (4.123)$$

$$\Delta\omega = \pm \omega_0 N_z N_g \left( \frac{\pi}{2|m|} j_{|m|,s} N_{|m|} (j_{|m|,s}) \bar{J}_{|m|} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (4.124)$$

середнє значення  $\bar{J}_{|m|} = Q_l k_n / (a I_m(k_n a))$ .

За зазначених умов вплив малих аксіальних хвильових чисел на власну частоту ХПТ виявляється сильнішим: поправка  $\Delta\omega$  (4.123) до частоти, яка обумовлена врахуванням малого  $k_z$ , виявляється прямо пропорційною аксіальному хвильовому числу,  $\Delta\omega \propto k_z^1$ . Тому ці умови природно назвати резонансними. Мінімальне магнітне поле, яке є необхідним для досягнення резонансних умов, відповідає хвилі з азимутальним номером моди  $m = -l$ . Воно визначається в такий спосіб:  $a^2 \omega_{ce}^2 / c^2 = j_{1,1}^2 - l \approx 13.68$ . Оцінимо, при яких значеннях магнітного поля  $H_0$  і радіуса хвилеводу  $a$  можна досягти це співвідношення:  $a H_0 \approx 6000$  (Гс см). Виходить, для хвилеводу з радіусом  $a \approx 20$  см потрібне не дуже сильне магнітне поле,  $H_0 \approx 300$  Гс. Для широких хвилеводів, у яких  $a = 10\delta$ , ця умова виконується, якщо

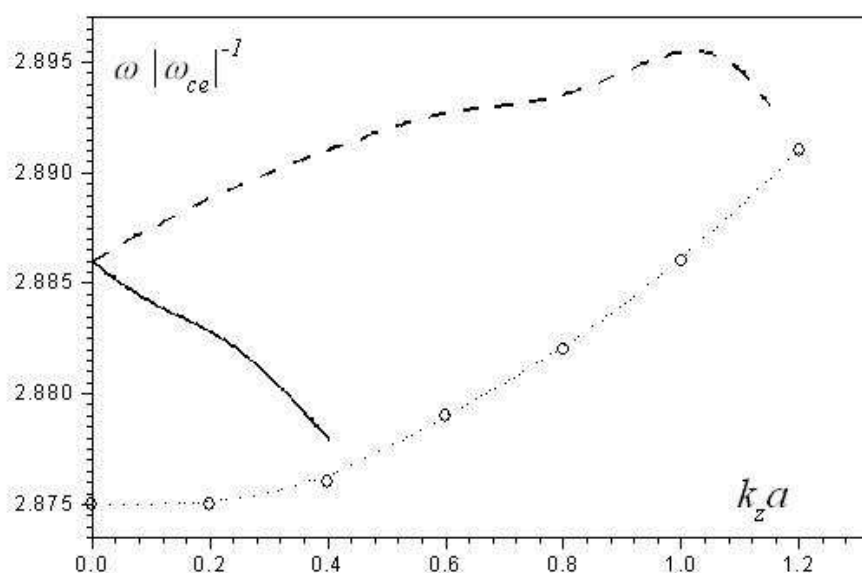


Рис. 4.13 Залежність частоти, нормованої на модуль електронної циклотронної частоти, незвичайно поляризованої хвилі у ВЧ діапазоні від аксіального хвильового числа, помноженого на радіус хвилеводу, за виконання умови резонансної взаємодії із звичайно поляризованою об'ємною хвилею. Азимутальний номер моди  $m = -1$ ,  $\omega_{pe} = 2.695|\omega_{ce}|$ ,  $a = 10\delta$ .

$\omega_{pe} = 2.7|\omega_{ce}|$ . Числовий аналіз дисперсійного рівняння (4.89) показав високу точність цієї оцінки: розв'язки рівнянь  $A_{12}|_{k_z=0} = 0$  і  $A_{21} = 0$  щодо частоти збігаються з великою точністю, включаючи третій знак після коми, якщо  $\omega_{pe} = (2.686 \div 2.695)|\omega_{ce}|$ .

На рис. 4.13 представлено результати числового аналізу дисперсійного рівняння (4.89) для хвиль з азимутальним номером моди  $m = -1$  у резонансному випадку:  $a = 10\delta$ ,  $\omega_{pe} = 2.695|\omega_{ce}|$ . Суцільною лінією показано дисперсійну криву ХПТ, штриховою лінією - криву об'ємної звичайної хвилі. Якщо ж величина магнітного поля ледве перевищує резонансне значення, то при малих аксіальних хвильових числах дисперсійні криві ХПТ і об'ємної звичайної хвилі міняються місцями в порівнянні з випадком, який зображено на рис. 4.13. На рис. 4.14 продемонстровано числове дослідження дисперсійне рівняння (4.89) для хвилеводу з  $\omega_{pe} = 2.686|\omega_{ce}|$ . Інші параметри хвиль і хвилеводу такі ж, як і для розрахунків, які на-

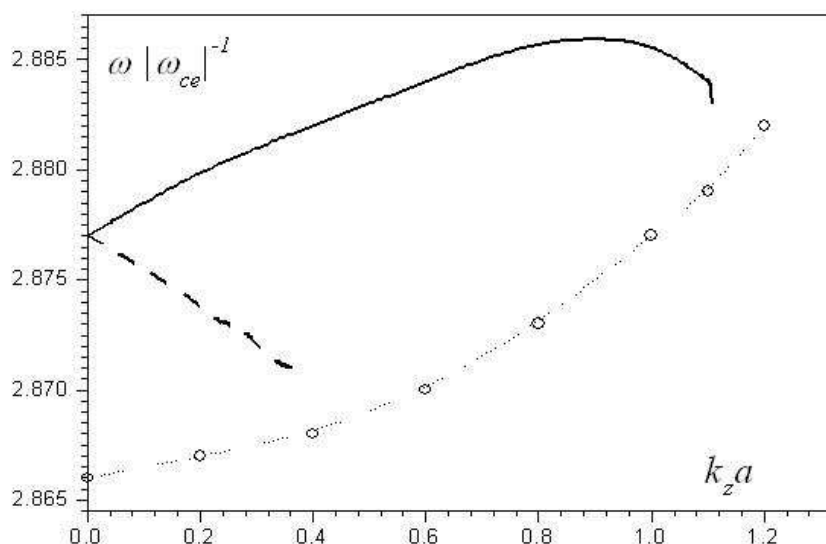


Рис. 4.14 Та сама залежність, що і на рис. 4.13. Азимутальний номер моди  $m = -1$ ,  $\omega_{pe} = 2.686|\omega_{ce}|$ ,  $a = 10\delta$ .

ведено на рис. 4.13.

Якщо величина магнітного поля відрізняється від резонансного значення, наприклад, перевищує його, як це показано на рис. 4.15, то залежність частоти хвилі від малого аксіального хвильового числа починає відрізнятися від лінійної. При побудові графіка на рис. 4.15 магнітне поле вибиралося на 2% сильнішим, ніж для рис. 4.14,  $\omega_{pe} = 2.636|\omega_{ce}|$ . Інші параметри хвилі і хвилеводу ті ж, що і для рис. 4.13.

Нелінійна залежність частоти від аксіального хвильового числа спостерігається і при аналогічному зменшенні магнітного поля в порівнянні з резонансним значенням. Це твердження проілюстровано на рис. 4.16. При побудові цього графіку вважалося, що  $\omega_{pe} = 2.754|\omega_{ce}|$ , значення інших параметрів хвилі і хвилеводу - ті ж, що і для рис. 4.13.

Оскільки корені функцій Бесселя  $j_{|m|,s}$  є ірраціональними числами, то і резонансні значення параметрів плазмового хвилеводу для випадку поширення даних ХПТ зв'язані нецілими числами. Тому при дослідженні випадку резонансного впливу аксіального хвильового числа на дисперсійні властивості ХПТ, щоб уник-

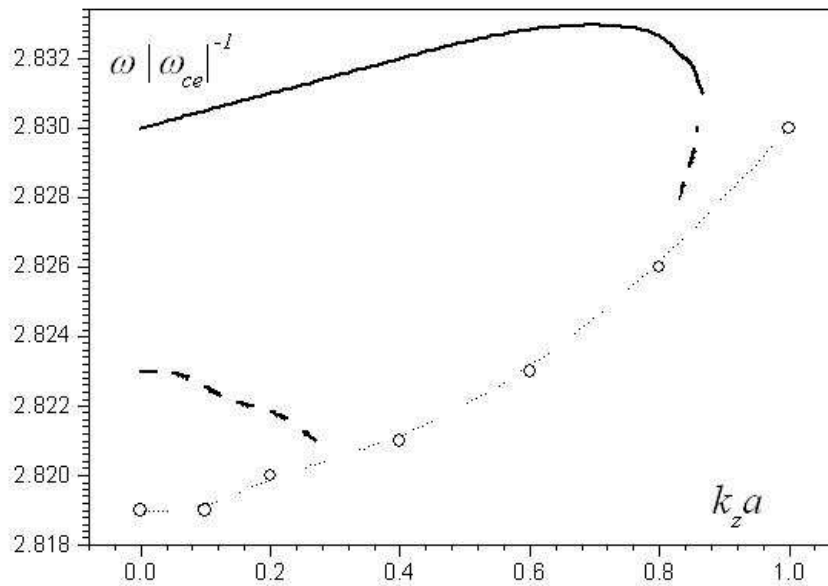


Рис. 4.15 Та сама залежність, що і на рис. 4.13, але за умови невеликого перевищення зовнішнім магнітним полем його резонансного значення. Азимутальний номер моди  $m = -1$ ,  $\omega_{pe} = 2.636|\omega_{ce}|$ ,  $a = 10\delta$ .

нути імовірності пропустити розв'язок чи одержати нефізичний розв'язок внаслідок числового розв'язання дисперсійного рівняння (4.89), були виконані попередні аналітичні оцінки. Здобуті різними методами результати добре узгоджуються, що підтверджує їх справедливість.

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі теоретично показано, що уздовж межі холодна магнітоактивна плазма – метал із скінченним радіусом кривини  $a$  є можливим поширення ХПТ із довільним значенням азимутального номера моди  $m$  і малим значенням аксіального хвильового числа  $k_z$ . Отримано дисперсійне рівняння (4.89) для цих хвиль у випадку неоднорідного радіального профілю густини плазми. Виконано аналітичне дослідження цього рівняння у випадку однорідного профілю густини для двох частотних діапазонів (4.96) і (4.97) існування цієї хвилі на основі методу послідовних наближень. Як нульове наближення використовувалася теорія азимутальних поверхневих хвиль. Поправка  $\Delta\omega$  до власної частоти ХПТ, яка обумовлена врахуванням малого аксіального числа, у загальному випадку є квадратичною за  $k_z$ ,  $\Delta\omega \propto k_z^2$ . Доведено існування гарного збігу результатів

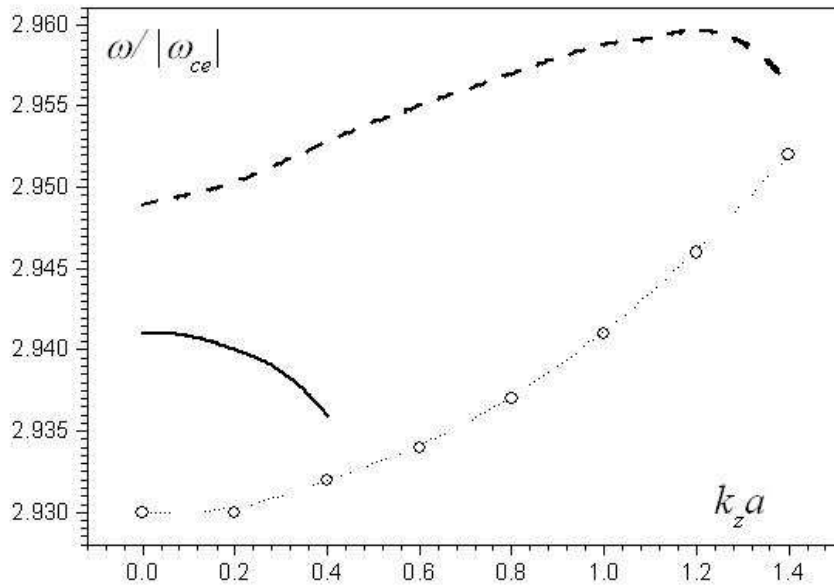


Рис. 4.16 Та сама залежність, що і на рис. 4.15, але у випадку коли зовнішнє магнітне поле є дещо меншим за його резонансне значення. Азимутальний номер моди  $m = -1$ ,  $\omega_{pe} = 2.754|\omega_{ce}|$ ,  $a = 10\delta$ .

числових розрахунків дисперсійного рівняння й аналітичних виразів для власної частоти. Визначено резонансні умови, за яких врахування малого  $k_z$  призводить до поправки до власної частоти ХПТ, яка є лінійною за аксіальним хвильовим числом,  $\Delta\omega \propto k_z^I$ .

Відзначимо, що на відміну від робіт [74, 89], у яких ХПТ досліджені для випадку магнітоактивного плазмового стовпа, який відокремлено від металевої камери скінченням [74] і нескінченням [89] вакуумним шаром, тільки для окремих значень азимутального номера моди і тільки числовими методами, у цьому підрозділі отримано наочні аналітичні вирази для власних частот ХПТ із довільним азимутальним номером моди. Наявність простих аналітичних розв'язків (4.105) - (4.108) і (4.116), (4.119) дозволяє помітно спростити пошук числового розв'язка дисперсійного рівняння (4.89).

#### 4.4. Вплив неоднорідності тороїдного магнітного поля на спектри поперечних поверхневих хвиль у металевих хвилеводах, повністю заповнених плазмою

У газовій тороїдній плазмі [21, 227] вплив тороїдності на дисперсійні властивості електромагнітних хвиль виявляється, по - перше, через просторову неоднорідність зовнішнього сталого тороїдного магнітного поля, по - друге, унаслідок тороїдного зсуву магнітних поверхонь [228], і нарешті, по – третє, через відмінність форми полоїдних перерізів магнітних поверхонь від кола. Вплив другого і третього факторів на дисперсійні властивості ПХ, що поширюються поперек неоднорідного аксіального магнітного поля уздовж малого азимутального кута, докладно досліджено в роботі [157]. Вивченню впливу першого фактора, що до того ж єдиний є важливим у випадку твердотільної плазми, присвячено цей підрозділ. Задача про дослідження спектрів поперечних ПХ у тороїдному магнітоактивному металевому хвилеводі може мати практичні застосування, крім розробки приладів плазмової електроніки, також і при інтерпретації результатів експериментів з керованого термоядерного синтезу, а саме, що стосуються явищ у навколостінковій плазмі [227, 229]. У цьому підрозділі у рамках теорії збурень вивчено поширення поверхневих хвиль поперек кругової осі тороїдного металевих магнітоактивного хвилеводу, який повністю заповнено плазмою, [162]. Досліджено розподіл полів цих хвиль у зазначеній хвилеводній структурі. Показано, що врахування тороїдності дає поправку другого порядку малості до власної частоти.

Величина зовнішнього однорідного магнітного поля якнайсильніше впливає на дисперсійні властивості АПХ за відсутності діелектричного шару, що відокремлює плазму від металевої камери [90]. Тому тут ми розглядаємо тороїдний металевий хвилевід круглого перерізу радіусом  $a$ , що повністю заповнено плазмою. Хвилевід вважаємо симетричним уздовж кругової осі,  $\partial/\partial\zeta=0$  у правій квазітороїдній системі координат. Полоїдний кут  $\vartheta$  відраховуємо від напрямку на центр симетрії тора. Вплив радіальної неоднорідності густини газової плазми на дисперсійні властивості АПХ докладно вивчено в [109], тому тут ми вважаємо густину плазмового заповнення однорідною. Таке припущення відповідає також випадку  $n$

– напівпровідникової плазми. Зовнішнє стале тороїдне магнітне поле має наступний вигляд,

$$B_{0\zeta} = B_0 / [1 - (r/R) \cos \vartheta] , \quad (4.125)$$

де  $R$  – великий радіус тора. Досліджуємо поширення  $E$  – хвилі з компонентами електромагнітного поля  $E_r, E_\vartheta, B_\zeta$  ( $H$  – хвиля поверхневого типу з компонентами поля  $E_\zeta, B_r, B_\vartheta$  у хвилеводах зазначеної геометрії не поширюється [120]). У фізиці напівпровідників розглянуті ПХ називаються магнітоплазовими поляритонами, а зазначена орієнтація зовнішнього магнітного поля відносно межі плазма – метал – геометрією Фойгта [81, 83, 119].

Вектори електричної індукції і напруженості електричного поля вважаємо зв'язаними тензором діелектричної проникливості холодної магнітоактивної плазми без зіткнень. Наведемо дві його компоненти, якими будемо користуватися надалі:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_0 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \equiv \varepsilon_1 , \quad (4.126)$$

$$\varepsilon_{12} = i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{c\alpha} \omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)} \equiv i\varepsilon_2 . \quad (4.127)$$

Плазмове заповнення вважаємо досить густим, щоб виконувалася нерівність  $\omega_{pe}^2 > \varepsilon_0 \omega_{ce}^2$ . У випадку газової плазми  $\varepsilon_0 = 1$ . У випадку плазми  $n$  – напівпровідників діелектрична проникність ґратки  $\varepsilon_0 > 1$ , і замість сум по сортах заряджених частинок у визначеннях (4.126) і (4.127) залишаються лише доданки, що відповідають електронам провідності. У припущенні малої тороїдності,  $\varepsilon_t = a/R \ll 1$ , розкладемо вирази для компонентів тензора  $\varepsilon_{ij}$  у ряд за малим параметром тороїдності,

$$\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{1,2}^{(0)} + \varepsilon_{1,2}^{(1)} \cos \vartheta + \varepsilon_{1,2}^{(2)} . \quad (4.128)$$

Головні доданки в рядах (4.128) не залежать від координат,  $\varepsilon_{1,2}^{(0)} = \varepsilon_{1,2}|_{B_{0\zeta}=B_0}$ ,

$$\varepsilon_1^{(0)} = \varepsilon_0 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^{(0)2}} , \quad \varepsilon_2^{(0)} = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}^{(0)} \omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^{(0)2})} . \quad (4.129)$$

Поправки першого порядку малості є лінійними за малим радіусом,

$$\varepsilon_1^{(1)} = -2 \frac{r}{R} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}^{(0)2}}{(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^{(0)2})^2}, \quad \varepsilon_2^{(1)} = -\frac{r}{R} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}^{(0)} \omega_{p\alpha}^2 (\omega^2 + \omega_{c\alpha}^{(0)2})}{\omega (\omega^2 - \omega_{c\alpha}^{(0)2})^2}. \quad (4.130)$$

Поправки другого порядку малості є квадратичними за малим радіусом,

$$\varepsilon_1^{(2)} = \frac{r^2}{2R^2} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}^{(0)2} (\omega_{c\alpha}^{(0)2} + 3\omega^2)}{(\omega_{c\alpha}^{(0)2} - \omega^2)^3}, \quad \varepsilon_2^{(2)} = \frac{r^2}{2R^2} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}^{(0)} \omega_{p\alpha}^2 \omega (\omega^2 + 3\omega_{c\alpha}^{(0)2})}{(\omega_{c\alpha}^{(0)2} - \omega^2)^3}. \quad (4.131)$$

Ми не враховуємо в розкладанні (4.128) доданки другого порядку малості, які є пропорційними до  $\exp(2i\vartheta)$ , оскільки вони роблять внесок до поправки до власної частоти ПХ тільки більш високого порядку малості, ніж другого. Циклотронна частота у виразах (4.129) – (4.131) визначається напруженістю тороїдного магнітного поля  $B_0$  за нехтування його неоднорідністю (у нульовому наближенні),  $\omega_{c\alpha}^{(0)} = \omega_{c\alpha}|_{\varepsilon_l=0}$ .

Тороїдна компонента магнітного ВЧ поля визначається з наступного рівняння, яке дістаємо з рівнянь Максвелла,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \varepsilon_l}{\varepsilon_{\perp}} \frac{\partial B_{\zeta}}{\partial r} \right) + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp}} \right) \frac{\partial B_{\zeta}}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} B_{\zeta} \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_2} \frac{\partial B_{\zeta}}{\partial \vartheta} \right) - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp}} \right) \frac{\partial B_{\zeta}}{\partial \vartheta} = 0, \end{aligned} \quad (4.132)$$

де  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_l^2 - \varepsilon_2^2$ . У нульовому наближенні рівняння (4.132) описує незалежне поширення АПХ із різними азимутальними номерами мод. Виходячи з цього і беручи до уваги симетрію задачі (див. представлення (4.128)), розв'язок рівняння (4.132) шукаємо в наступному вигляді:

$$B_{\zeta} = \left[ B_{\zeta}^{(0)}(r) + B_{\zeta}^{(2)}(r) + B_{\zeta}^{(+l)}(r) e^{i\vartheta} + B_{\zeta}^{(-l)}(r) e^{-i\vartheta} \right] \exp(im\vartheta - i\omega t). \quad (4.133)$$

Компоненти електричних полів АПХ представляємо у вигляді, аналогічному (4.133). Представлення (4.133), поряд з основною гармонікою  $\propto \exp(im\vartheta)$ , містить дві найближчі сателітні гармоніки  $\propto \exp(i(m\pm 1)\vartheta)$ . Як буде показано в цьому підрозділі, поправка  $B_{\zeta}^{(2)}$  до амплітуди основної гармоніки АПХ, яка обумовлена тороїдністю хвилеводу, виявляється величиною другого порядку малості.



Надалі нам знадобиться зв'язок похідної компоненти електричного поля хвилі  $E_g$  з  $B_\zeta$ ,

$$E_g^{(0)}(r) = \frac{c}{i\omega\epsilon_\perp^{(0)}} \left[ \epsilon_l^{(0)} \frac{dB_\zeta^{(0)}}{dr} + \frac{m\epsilon_2^{(0)}}{r} B_\zeta^{(0)} \right], \quad (4.134)$$

$$E_g^{(\pm 1)}(r) = \frac{c}{i\omega\epsilon_\perp^{(0)}} \left[ \epsilon_l^{(0)} \frac{\partial B_\zeta^{(\pm 1)}}{\partial r} + \frac{m \pm 1}{r} \epsilon_2^{(0)} B_\zeta^{(\pm 1)} + \frac{\epsilon_\perp^{(0)} \epsilon_l^{(1)} - \epsilon_\perp^{(1)} \epsilon_l^{(0)}}{2\epsilon_\perp^{(0)}} \frac{\partial B_\zeta^{(0)}}{\partial r} + \frac{m(\epsilon_\perp^{(0)} \epsilon_2^{(1)} - \epsilon_\perp^{(1)} \epsilon_2^{(0)})}{2r\epsilon_\perp^{(0)}} B_\zeta^{(0)} \right], \quad (4.135)$$

$$E_g^{(2)}(r) = \frac{1}{\epsilon_\perp^{(0)}} \left\{ -\frac{\epsilon_\perp^{(2)}}{2} E_g^{(0)} - \frac{\epsilon_\perp^{(1)}}{2} (E_g^{(+1)} + E_g^{(-1)}) + \frac{c\epsilon_l^{(1)}}{2i\omega} \frac{\partial}{\partial r} (B_\zeta^{(+1)} + B_\zeta^{(-1)}) + \frac{c\epsilon_l^{(0)}}{i\omega} \frac{\partial B_\zeta^{(2)}}{\partial r} + \frac{c\epsilon_l^{(2)}}{2i\omega} \frac{\partial B_\zeta^{(0)}}{\partial r} + \frac{cm\epsilon_2^{(0)}}{i\omega r} B_\zeta^{(2)} + \frac{cm\epsilon_2^{(2)}}{2i\omega r} B_\zeta^{(0)} + \frac{cm\epsilon_2^{(1)}}{2i\omega r} [(m+1)B_\zeta^{(+1)} + (m-1)B_\zeta^{(-1)}] \right\}, \quad (4.136)$$

тут

$$\begin{aligned} \epsilon_\perp^{(0)} &= \epsilon_l^{(0)2} - \epsilon_2^{(0)2}, \quad \epsilon_\perp^{(1)} = 2\epsilon_l^{(0)}\epsilon_l^{(1)} - 2\epsilon_2^{(0)}\epsilon_2^{(1)}, \\ \epsilon_\perp^{(2)} &= \epsilon_l^{(1)2} + 2\epsilon_l^{(0)}\epsilon_l^{(2)} - \epsilon_2^{(1)2} - 2\epsilon_2^{(0)}\epsilon_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Розв'язок рівняння (4.132) має задовольняти наступним крайовим умовам. Поля хвилі мають бути обмеженими усередині хвилеводу, тангенціальна (у даному випадку це - похідна) компонента електричного поля має дорівнювати нулю на внутрішній поверхні металевої камери ( $E_g|_{r=a} = 0$ ).

За нульове наближення обираємо азимутальні поверхневі хвилі, що поширюються за азимутом в циліндричному металевому хвилеводі з круглим перерізом радіусом  $a$  [120], повністю заповненому однорідною плазмою. Зовнішнє статне магнітне  $B_0$  поле є паралельним до осі хвилеводу. Основні відомості про властивості АПХ, які поширюються поперек зовнішнього аксіального магнітного поля вздовж межі плазма – метал наведено на початку Розділу 4.

Визначимо амплітуди  $B_\zeta^{(\pm 1)}(r)$  сателітних гармонік шляхом розв'язання зада-

чі у першому наближенні. Припускаємо, що амплітуди  $B_{\zeta}^{(\pm l)}(r)$  сателітних гармонік – є величинами першого порядку малості. Підставляємо вирази (4.133) для поля  $B_{\zeta}$  і (4.128) для компонентів тензора  $\varepsilon_{ij}$  до рівняння (4.132). Виділяємо в ньому доданки першого порядку малості. Вони виявляються пропорційними або  $\exp[i(m+1)\vartheta]$ , або  $\exp[i(m-1)\vartheta]$ . Іншими словами, врахування доданків першого порядку малості не змінює амплітуди основної гармоніки, отже, розв’язання задачі у першому наближенні не визначає поправки до власної частоти АПХ. Ці доданки утворюють неоднорідні рівняння Бесселя для  $B_{\zeta}^{(\pm l)}(r)$  з відомою правою частиною. Розв’язки цих рівнянь, що задовольняють крайовій умові обмеженості полів на осі хвилеводу, мають наступний вигляд:

$$B_{\zeta}^{(\pm l)}(r) = -I_{m \pm l}(k_{\perp} r) \int_a^r K_{m \pm l}(k_{\perp} r) \hat{L}_{\mp}^{(l)} I_m(k_{\perp} r) r dr + C_{\pm} I_{m \pm l}(k_{\perp} r) + K_{m \pm l}(k_{\perp} r) \int_0^r I_{m \pm l}(k_{\perp} r) \hat{L}_{\mp}^{(l)} I_m(k_{\perp} r) r dr ; \quad (4.138)$$

де оператор  $\hat{L}_{\pm}^{(l)}$  дорівнює

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\pm}^{(l)} = & \left( 2\varepsilon_l^{(0)} \varepsilon_{\perp}^{(0)} \right)^{-1} \left\{ \frac{\varepsilon_{\perp}^{(l)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \varepsilon_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon_{\perp}^{(0)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \varepsilon_l^{(l)} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right. \\ & - \varepsilon_l^{(0)} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}^{(l)}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varepsilon_{\perp}^{(0)}}{r} \frac{\partial \varepsilon_2^{(l)}}{\partial r} \hat{\Theta} + \frac{\varepsilon_2^{(0)}}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}^{(l)}}{\partial r} \hat{\Theta} - \frac{\varepsilon_{\perp}^{(l)}}{r^2} \varepsilon_l^{(0)} \hat{\Theta}^2 \\ & - \frac{\varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_l^{(l)}}{r^2} \hat{\Theta}^2 + 2 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_{\perp}^{(l)} \mp \frac{\varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_{\perp}^{(l)}}{r^2} \hat{\Theta} \pm \frac{\varepsilon_l^{(0)} \varepsilon_{\perp}^{(l)}}{r^2} \hat{\Theta} \\ & \left. \pm \frac{\varepsilon_2^{(l)} \varepsilon_{\perp}^{(0)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \mp \frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_{\perp}^{(l)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right\} , \quad (4.139) \end{aligned}$$

$$\hat{\Theta} I_m = -m I_m .$$

Константи інтегрування  $C_{\pm}$  знаходимо з умови рівності нулю на металевій поверхні хвилеводу амплітуд сателітних гармонік похідного електричного поля,

$$E_g^{(\pm l)}(a) = 0,$$

$$C_{\pm} = - \left[ \varepsilon_l^{(0)} k_{\perp} K'_{m \pm l} \int_0^a I_{m \pm l} \hat{L}_{\mp}^{(l)} I_m r dr + \frac{m \pm l}{a} \varepsilon_2^{(0)} K_{m \pm l} \int_0^a I_{m \pm l} \hat{L}_{\mp}^{(l)} I_m r dr + \frac{\varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_l^{(l)} - \varepsilon_{\perp}^{(l)} \varepsilon_l^{(0)}}{2 \varepsilon_{\perp}^{(0)}} k_{\perp} I'_m \right]$$

$$+ \frac{m(\varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_2^{(l)} - \varepsilon_{\perp}^{(l)} \varepsilon_2^{(0)})}{2a\varepsilon_{\perp}^{(0)}} I_m \left] \cdot \left[ \varepsilon_l^{(0)} k_{\perp} I'_{m\pm l} + \frac{m \pm l}{a} \varepsilon_2^{(0)} I_{m\pm l} \right]^{-l} \right|_{\omega=\omega_m^{(0)}}^{r=a} . \quad (4.140)$$

Визначимо тепер поправку до власної частоти поперечних ПХ, яка обумовлена тороїдністю хвилеводу шляхом розв'язання задачі у другому наближенні. Доданки другого порядку малості в (4.132) є пропорційними одному з наступних фазових множників:  $\exp(im\vartheta)$  або  $\exp[i(m\pm 2)\vartheta]$ . Доданки при  $\exp[i(m\pm 2)\vartheta]$  складають рівняння для амплітуд других сателітних гармонік. Цими гармоніками в розкладанні (4.133) можна знехтувати, оскільки їхній внесок до поправок до власної частоти поперечних ПХ виявляється величиною більш високого порядку малості, ніж другого. Доданки другого порядку малості, які є пропорційними до  $\exp(im\vartheta)$ , задають неоднорідне диференціальне рівняння Бесселя для поправки  $B_{\xi}^{(2)}(r)$  до амплітуди основної гармоніки поперечних ПХ. Розв'язок цього рівняння, що задовольняє умові обмеженості на круговій осі тора, знаходимо методом варіації сталої,

$$B_{\xi}^{(2)} = K_m(k_{\perp}r) \int_0^r I_m \left( \hat{L}_{-}^{(l)} B_{\xi}^{(-l)} + \hat{L}_{+}^{(l)} B_{\xi}^{(+l)} + \hat{L}^{(2)} B_{\xi}^{(0)} \right) r dr - \\ I_m(k_{\perp}r) \int_a^r K_m \left( \hat{L}_{-}^{(l)} B_{\xi}^{(-l)} + \hat{L}_{+}^{(l)} B_{\xi}^{(+l)} + \hat{L}^{(2)} B_{\xi}^{(0)} \right) r dr + C_2 I_m(k_{\perp}r) . \quad (4.141)$$

Цей розв'язок (4.141) записується у вигляді суми частинного розв'язка (два перші доданки, що мають інтегральне представлення) неоднорідного диференціального рівняння і загального розв'язку (третій доданок  $C_2 I_m(k_{\perp}r)$ ) відповідного однорідного диференціального рівняння. У загальному виразі (4.133) для аксіального компонента магнітного поля хвилі цей доданок  $C_2 I_m(k_{\perp}r)$  і амплітуда  $B_{\xi}^{(0)}(r)$  виявляються подібними доданками. Тобто константа інтегрування  $C_2$  відіграє роль поправки до нормувального множника, що у нульовому наближенні був обраний рівним одиниці. Тому константу  $C_2$  знаходять не з крайових умов, а з наступної умови, яка є аналогічною умові нормування хвильової функції в квантовій механіці [58],

$$\int_0^a \left[ 2B_{\zeta}^{(2)} I_m(k_{\perp} r) + \left( B_{\zeta}^{(+l)} \right)^2 + \left( B_{\zeta}^{(-l)} \right)^2 \right] r dr = 0, \quad (4.142)$$

Рівняння (4.142) виражає наступну фізичну умову: енергія магнітного поля хвилі, яку обчислено з урахуванням доданків другого порядку малості, збігається зі значенням, яке обчислено у нульовому наближенні. Разом з тим, вигляд дисперсійного рівняння, яке здобуто нижче з урахуванням доданків другого порядку малості, не залежить від значення константи  $C_2$ .

Оператор  $\hat{L}^{(2)}$ , що входить до розв'язка (4.141), визначається в такий спосіб,

$$\begin{aligned} \hat{L}^{(2)} = & \left[ 2\varepsilon_l^{(0)} \varepsilon_{\perp}^{(0)} \right]^{-l} \left\{ \frac{\varepsilon_{\perp}^{(2)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \varepsilon_l^{(0)} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{\varepsilon_{\perp}^{(l)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \varepsilon_l^{(l)} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \right. \\ & \frac{\varepsilon_{\perp}^{(0)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \varepsilon_l^{(2)} \frac{\partial}{\partial r} \right] - \frac{\varepsilon_l^{(l)} \varepsilon_{\perp}^{(l)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\varepsilon_l^{(0)} \varepsilon_{\perp}^{(2)}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\varepsilon_{\perp}^{(l)} \varepsilon_2^{(l)}}{r^2} \hat{\theta} - \frac{2\varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_2^{(2)}}{r^2} \hat{\theta} \\ & + \frac{\varepsilon_2^{(l)} \varepsilon_{\perp}^{(l)}}{r^2} \hat{\theta} + \frac{2\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_{\perp}^{(2)}}{r^2} \hat{\theta} - \frac{\varepsilon_{\perp}^{(2)} \varepsilon_l^{(0)}}{r^2} \hat{\theta}^2 - \frac{\varepsilon_{\perp}^{(l)} \varepsilon_l^{(l)}}{r^2} \hat{\theta}^2 \\ & \left. - \frac{\varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_l^{(2)}}{r^2} \hat{\theta}^2 + 2 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}^{(2)} \varepsilon_{\perp}^{(0)} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}^{(l)} \varepsilon_{\perp}^{(l)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Крайова умова на металевій поверхні для основної гармоніки поперечної компоненти електричного поля хвилі з урахуванням доданків другого порядку малості може бути представлена в наступному вигляді:

$$D^{(0)} + D^{(2)} = 0, \quad (4.144)$$

де  $D^{(2)} = E_g^{(2)}(a)$ .

Поправка  $\omega_m^{(2)}$  до власної частоти поперечних ПХ, яка обумовлена тороїдністю хвилеводу, виявилася малою величиною другого порядку,

$$\omega_m^{(2)} = -D^{(2)} \left( \frac{\partial D^{(0)}}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_m^{(0)}}^{-l}. \quad (4.145)$$

Умова застосовності запропонованого підходу до визначення дисперсійних властивостей АПХ у тороїдних хвилеводах полягає в малості поправки,  $|\omega_m^{(2)}| \ll \omega_m^{(0)}$ , у порівнянні з основним доданком.

Основним математичним достоїнством результату (4.145) є та обставина, що задачу про двовимірну неоднорідність (у полоїдному перерізі) зведено до одновимірної (за радіусом). Очевидним недоліком результату (4.145) є його громіздкість. У граничному випадку широких хвильоводів,  $R \gg a \gg |m|/k_{\perp}$ , власну частоту поперечних ПХ можна порахувати в НЧ діапазоні (4.137) за допомогою наступних асимптотичних виразів:

$$\omega_m^{(0)} = \frac{m\delta}{a} |\omega_{ce}|, \quad (4.146)$$

$$\omega_m^{(2)} = -0,25 \varepsilon_t^2 \omega_m^{(0)}. \quad (4.147)$$

А у ВЧ діапазоні (4.138) власна частота в нульовому наближенні  $\omega_m^{(0)}$  та поправка  $\omega_m^{(2)}$  до неї мають інший вигляд:

$$\omega_m^{(0)} = \sqrt{\omega_{hh}^2 + \frac{m^2 c^2}{a^2}}, \quad (4.148)$$

$$\omega_m^{(2)} = \frac{\varepsilon_t^2 c^2 m^2}{4 \omega^2 a^2} \left( 1 + \frac{3 |\omega_{ce}| k_{\perp} a}{\omega |m|} \right) \omega_m^{(0)}. \quad (4.149)$$

Для власних частот поперечних ПХ, що поширюються у вузьких,  $k_{\perp} a < |m|$ , тороїдних хвильоводах у НЧ діапазоні, можна здобути з (4.145) наступні асимптотичні вирази:

$$\omega_m^{(0)} = |\omega_{ce}| \left[ 1 - \frac{1}{2m(m+1)} \left( \frac{a}{\delta} \right)^2 \right], \quad (4.150)$$

$$\omega_m^{(2)} = \frac{2m^2 - m + 1}{4m^2(m+1)} \varepsilon_t^2 \omega_m^{(0)}. \quad (4.151)$$

У ВЧ діапазоні значення власної частоти в нульовому наближенні  $\omega_m^{(0)}$  визначається формулою (4.148), а поправка до частоти приблизно дорівнює

$$\omega_m^{(2)} = \frac{2m^2 + m + 1}{2m^2} \varepsilon_t^2 \left( \frac{m\delta}{a} \right)^4 \frac{\omega_{pe}}{|\omega_{ce}|} \omega_m^{(0)}. \quad (4.152)$$

Відзначимо, що у вузьких хвильоводах поведінка амплітуд сателітних гармонік істотно розрізняється, а саме:  $B_{\zeta}^{(\pm l)}(r) \propto r^{m \pm l}$ ; але завдяки відмінності чис-

лових множників  $C_{\pm}$  ці амплітуди виявляються рівними за порядком величини на металевій поверхні.

Для аналізу здобутих результатів наведемо тут асимптотичні вирази [148] для поправки  $\omega_{el}^{(2)}$  до власної частоти поперечних ПХ, обумовленої еліптичністю форми поперечного перерізу металевого хвильоводу, повністю заповненого плазмою. Для поперечних ПХ із НЧ діапазону, що поширюються в широких хвильоводах, поправка  $\omega_{el}^{(2)}$  дорівнює

$$\omega_{el}^{(2)} = -0.25 \varepsilon_{el}^2 (4 - m^2 + 2a/\delta) \omega_m^{(0)}. \quad (4.153)$$

Форма перерізу камери визначається з використанням параметра еліптичності в такий спосіб,  $r(\vartheta) = a(1 + \varepsilon_{el} \cos 2(\vartheta - \pi/2))$ . У випадку вузьких хвильоводів

$$\omega_{el}^{(2)} = - \frac{\varepsilon_{el}^2}{2m} \frac{2 - 4m^2 - 4m^2}{2 - 4m^2} \frac{a^2}{\delta^2} \omega_m^{(0)}. \quad (4.154)$$

Таким чином, порівнявши вирази (4.154) з відповідними виразами та (4.151), можна зробити висновок про те, що вплив тороїдної неоднорідності зовнішнього магнітного поля на спектри поперечних ПХ є сильнішим за вплив еліптичності форми перерізу хвильоводу у випадку розрідженої плазми. Порівняння здобутих результатів із впливом тороїдного зсуву магнітних поверхонь не має сенсу, бо цей зсув є надто малим поблизу поверхні металеві камери, де локалізовані досліджувані хвилі.

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі показано можливість існування поперечних ПХ у тороїдних металевих хвильоводах. Визначено просторові розподіли (4.130) – (4.132), (4.138) і (4.141) полів АПХ. Показано, що врахування тороїдної неоднорідності зовнішнього магнітного поля призводить до того, що поперечні ПХ поширюються в тороїдних хвильоводах у вигляді хвильового пакета. Амплітуди  $A_{m+N}$  сателітних гармонік  $\propto \exp[i(m+N)\vartheta]$  у такому пакеті є малими величинами,  $A_{m+N} \sim \varepsilon_t^N A_m$ , у порівнянні з амплітудою  $A_m$  основної гармоніки  $\propto \exp(im\vartheta)$ . Вплив тороїдної неоднорідності зовнішнього магнітного поля на амплітуду основної гармоніки позначається в другому порядку малості за параметром тороїдності  $\varepsilon_t$ .

Визначено поправку (4.145) до власної частоти поперечних ПХ, обумовлену тороїдною неоднорідністю зовнішнього магнітного поля, що виявилася величиною другого порядку малості. Отримано наочні аналітичні вирази (4.146) - (4.152) для власних частот АПХ, що поширюються в широких і вузьких хвилеводах у двох частотних діапазонах, у яких можуть існувати досліджувані поперечні ПХ.

#### 4.5. Поперечні поверхневі хвилі навколо металевого кільця у тороїдному магнітному полі

На можливість поширення АПХ поперек аксіального зовнішнього магнітного поля вздовж поверхні металевого циліндра, який поміщено в плазму, вказано в [120]. При цьому зазначено, що зміна знака кривизни поверхні плазма – метал призводить лише до незначних змін у спектрах АПХ. У цьому підрозділі у рамках теорії збурень вивчено поширення незвичайно поляризованих електромагнітних поверхневих хвиль поперек сталого тороїдного магнітного поля навколо металевого кільця (див. рис. 4.17)), яке поміщено в плазму, [154]. Амплітуду основної гармоніки цих хвиль визначено з точністю до малих доданків другого порядку, і амплітуди перших сателітних гармонік знайдено з урахуванням доданків першого порядку малості. Показано, що поправка до власної частоти, яка обумовлена неоднорідністю сталого тороїдного магнітного поля, є величиною другого порядку малості.

Малий радіус  $a$  ідеально провідного металевого кільця вважаємо малою величиною в порівнянні з великим радіусом  $R$  кільця,  $\varepsilon_i = a/R \ll 1$ . Стале тороїдне магнітне поле  $\vec{B}_0 = B_{0\zeta} \vec{e}_\zeta$  створюється провідником з постійним струмом, розташованим уздовж прямої осі кільця, перпендикулярно площині симетрії кільця (див. рис. 4.17). Залежність  $B_{0\zeta}(r, \vartheta)$  визначено формулою (4.120). Малий радіус  $r$  відраховується в полоїдному перерізі від кругової осі кільця,  $\zeta$  - великий азимут тора. Полоїдний кут  $\vartheta$  відраховується від напрямку на центр симетрії кільця. Структуру вважаємо симетричною уздовж кругової осі,  $\partial / \partial \zeta \equiv 0$ .

Досліджуємо поширення  $E$  – хвилі з компонентами електромагнітного поля

$E_r, E_\vartheta, B_\zeta$  ( $H$  – хвиля поверхневого типу з компонентами поля  $E_\zeta, B_r, B_\vartheta$  у хвилеводах зазначеної геометрії непоширюється [120]). Густина плазми, що оточує кільце, вважаємо однорідною. Таке припущення, поперше, відповідає випадку  $n$  – напівпровідникової плазми. Металеve кільце може також служити антеною, призначеною для збудження поперечних ПХ із метою підтримання газового розряду. У цьому випадку густину плазми також можна вважати однорідною на відстанях порядку глибини проникнення полів ПХ до плазми.

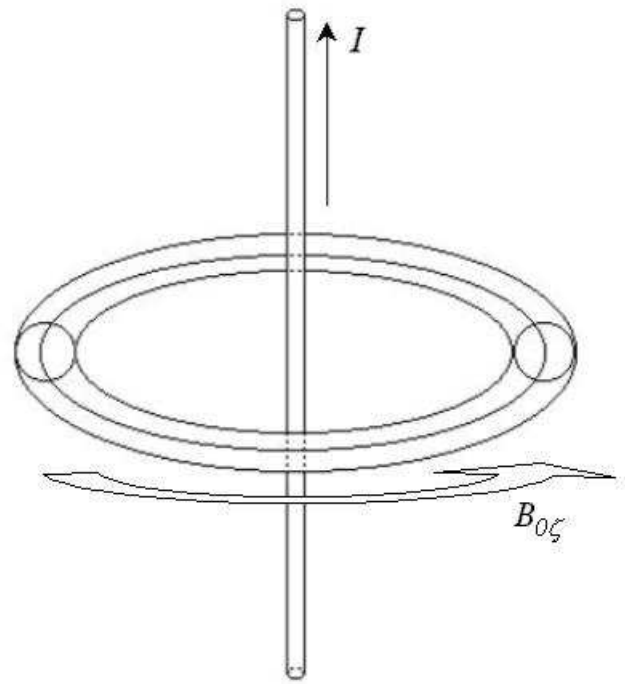


Рис. 4.17 Схематичний опис структури плазма – металеве кільце у тороїдному магнітному полі

Вектори електричної індукції і напруженості електричного поля вважаємо зв'язаними тензором діелектричної проникності холодної магнітоактивної плазми без зіткнень. Плазмове середовище вважаємо досить густим, щоб виконувалася нерівність  $\omega_{pe}^2 \gg \varepsilon_0 \omega_{ce}^2$ .

Вирази для компонентів тензора  $\varepsilon_{ij}$  розкладаємо в ряд (4.123) за малим параметром тороїдності  $\varepsilon_t$ .

Тороїдна компонента магнітного ВЧ поля визначається з рівняння (4.127). Розв'язок рівняння (4.127) шукаємо у вигляді (4.128). Компоненти електричних полів поперечних ПХ представляємо у вигляді, аналогічному (4.128). Надалі для виконання досліджень знадобиться зв'язок (4.129) – (4.131) поперечної компоненти електричного поля хвилі  $E_\vartheta$  з  $B_\zeta$ .

Розв'язок рівняння (4.127) має задовольняти наступним крайовим умовам. Перше, поля хвилі мають бути обмеженими усюди поза кільцем. Друге, щоб уникнути



необхідності формулювати граничні умови на прямій осі тора, припускаємо, що поля хвилі нехтовно малі при віддаленні від кільця на відстані порядку великого радіуса кільця, тобто що великий радіус кільця набагато більший за глибину проникнення полів до плазми. Третє, тангенціальна (у розглянутому випадку це - пологідна) компонента електричного поля має дорівнювати нулю на поверхні кільця,  $E_g|_{r=a} = 0$ .

За нульове наближення використовуємо теорію АПХ, що поширюються за азимутом навколо циліндричного металевго стрижня круглого перерізу радіусом  $a$  [120], який поміщено в однорідну плазму. Зовнішнє стале магнітне поле  $B_0$  є паралельним до осі стрижня. Основні відомості про властивості АПХ наведено на початку Розділу 4.

Амплітуда  $B_\zeta^{(0)}(r)$  основної гармоніки в нульовому наближенні в цьому випадку виражається через функцію Макдональда [226],

$$B_\zeta^{(0)}(r) = K_m(k_\perp r) . \quad (4.155)$$

Визначимо амплітуди  $B_\zeta^{(\pm l)}(r)$  сателітних гармонік внаслідок розв'язання задачі у першому наближенні. Припускаємо, що амплітуди  $B_\zeta^{(\pm l)}$  сателітних гармонік є величинами першого порядку малості. Підставляємо вирази (4.128) для поля  $B_\zeta$  і (4.123) для компонентів тензора  $\varepsilon_{ij}$  до рівняння (4.127). Виділяємо в ньому доданки першого порядку малості. Вони виявляються пропорційними до Фур'є множників  $\exp[i(m+1)\vartheta]$  або  $\exp[i(m-1)\vartheta]$ . Іншими словами, урахування доданків першого порядку малості не змінює амплітуди основної гармоніки, отже, розв'язання задачі у першому наближенні не вносить поправки до власної частоти АПХ. Ці доданки складають неоднорідні рівняння Бесселя для  $B_\zeta^{(\pm l)}(r)$  з відомою правою частиною. Розв'язки цих рівнянь, що задовольняють крайовій умові про обмеженість величини поля АПХ на нескінченній відстані від кільця, мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} B_\zeta^{(\pm l)}(r) = & K_{m\pm l}(k_\perp r) \int_a^r r I_{m\pm l}(k_\perp r) \hat{L}_\mp^{(l)} K_m(k_\perp r) dr \\ & + C_\pm K_{m\pm l}(k_\perp r) - I_{m\pm l}(k_\perp r) \int_\infty^r r K_{m\pm l}(k_\perp r) \hat{L}_\mp^{(l)} K_m(k_\perp r) dr ; \end{aligned} \quad (4.156)$$

де оператор  $\hat{L}_{\pm}^{(l)}$  заданий формулою (4.134). Константи інтегрування  $C_{\pm}$  знаходимо з умови рівності нулю амплітуд сателітних гармонік похідного електричного поля на металевій поверхні кільця,  $E_g^{(\pm l)}(a) = 0$ ,

$$C_{\pm} = \left[ \frac{m+l}{a} \varepsilon_2^{(0)} K_{m\pm l}(k_{\perp} a) - \varepsilon_l^{(0)} k_{\perp} K'_{m\pm l}(k_{\perp} a) \right]^{-l} \left\{ \varepsilon_l^{(0)} k_{\perp} I'_{m\pm l}(k_{\perp} a) \int_{\infty}^a r K_{m\pm l}(k_{\perp} r) \hat{L}_{\mp}^{(l)} K_m(k_{\perp} r) dr + \frac{m \pm l}{a} \varepsilon_2^{(0)} I_{m\pm l}(k_{\perp} a) \int_{\infty}^a r K_{m\pm l}(k_{\perp} r) \hat{L}_{\mp}^{(l)} K_m(k_{\perp} r) dr + k_{\perp} K'_m(k_{\perp} a) \frac{\varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_l^{(l)} - \varepsilon_{\perp}^{(l)} \varepsilon_l^{(0)}}{2 \varepsilon_{\perp}^{(0)}} - \frac{m(\varepsilon_{\perp}^{(0)} \varepsilon_2^{(l)} - \varepsilon_{\perp}^{(l)} \varepsilon_2^{(0)})}{2 a \varepsilon_{\perp}^{(0)}} K_m(k_{\perp} a) \right\} \Big|_{\omega=\omega_m^{(0)}}. \quad (4.157)$$

Здобудемо поправку до власної частоти поперечних ПХ, яка обумовлена тородною неоднорідністю магнітного поля внаслідок розв'язання задачі у другому наближенні. Доданки другого порядку малості в (4.127) є пропорційними до одного з наступних фазових множників:  $\exp(im\vartheta)$  чи  $\exp[i(m \pm 2)\vartheta]$ . Доданки при  $\exp[i(m \pm 2)\vartheta]$  складають рівняння для амплітуд других сателітних гармонік. Доданки другого порядку малості, які є пропорційними до  $\exp(im\vartheta)$ , задають неоднорідне диференціальне рівняння Бесселя для поправки  $B_{\xi}^{(2)}(r)$  до амплітуди основної гармоніки АПХ. Розв'язок цього рівняння, що задовольняє умові обмеженості величини полів АПХ при нескінченному віддаленні від кільця, знаходимо методом варіації постійної,

$$B_{\xi}^{(2)}(r) = K_m(k_{\perp} r) \int_a^r r I_m(k_{\perp} r) \left( \hat{L}_{-}^{(l)} B_{\xi}^{(-l)} + \hat{L}_{+}^{(l)} B_{\xi}^{(+l)} + \hat{L}^{(2)} B_{\xi}^{(0)} \right) dr + C_2 K_m(k_{\perp} r) - I_m(k_{\perp} r) \int_{\infty}^r r K_m(k_{\perp} r) \left( \hat{L}_{-}^{(l)} B_{\xi}^{(-l)} + \hat{L}_{+}^{(l)} B_{\xi}^{(+l)} + \hat{L}^{(2)} B_{\xi}^{(0)} \right) dr. \quad (4.158)$$

Оператор  $\hat{L}^{(2)}$ , що входить до розв'язка (4.158), визначається формулою (4.138).

Крайових умов, що були сформульовані вище, виявляється недостатньо для визначення константи інтегрування  $C_2$ , що входить до виразу (4.158). Ця константа є

величиною другого порядку малості, її знаходять з умови

$$\int_a^\infty \left[ 2B_\xi^{(2)} K_m(k_\perp r) + \left( B_\xi^{(+l)} \right)^2 + \left( B_\xi^{(-l)} \right)^2 \right] r dr = 0, \quad (4.159)$$

яка означає, що енергія магнітного поля хвилі, обчислена з урахуванням доданків другого порядку малості, збігається зі значенням, обчисленим в нульовому наближенні. Разом з тим, слід зазначити, що вигляд дисперсійного рівняння, здобутого нижче з урахуванням доданків другого порядку малості, не залежить від значення константи  $C_2$ .

Крайова умова на металевій поверхні для основної гармоніки поперечної компоненти електричного поля хвилі з урахуванням доданків другого порядку малості має вигляд (4.139). Поправка  $\omega_m^{(2)}$  (4.140) до власної частоти поперечних ПХ, яка обумовлена тороїдністю, виявляється малою величиною другого порядку. Умова застосовності запропонованого підходу до визначення дисперсійних властивостей АПХ, що поширюються навколо металевих кілець, поміщених у магнітоактивну плазму, складається в малості поправки,  $|\omega_m^{(2)}| \ll \omega_m^{(0)}$ , у порівнянні з основним доданком.

У граничному випадку товстих кілець,  $R \gg a \gg |m|/k_\perp$ , власну частоту поперечних ПХ можна порахувати в НЧ діапазоні (4.96) за допомогою наступного асимптотичного виразу:

$$\omega_m^{(2)} = 0,25 \varepsilon_t^2 \omega_m^{(0)}, \quad (4.160)$$

при цьому основний доданок  $\omega_m^{(0)}$  визначається формулою (4.141).

У ВЧ діапазоні (4.97) основний доданок  $\omega_m^{(0)}$  визначається формулою (4.143), і обумовлена тороїдною неоднорідністю сталого магнітного поля поправка до частоти ПХ дорівнює

$$\omega_m^{(2)} = -\frac{\varepsilon_t^2}{4} \frac{\delta^2 m^2}{a^2} \left( 1 + \frac{3|\omega_{ce}| k_\perp a}{\omega_{pe} |m|} \right) \omega_m^{(0)}. \quad (4.161)$$

При аналізі виразів (4.143) і (4.161) важливо мати на увазі, що необхідною умовою існування АПХ у ВЧ діапазоні є малість множника  $(\delta m/a)^2 < |\omega_{ce}|/\omega_{pe}$ . Відзначимо

також, що розбіжність в радіальній залежності амплітуд сателітних гармонік поперечних ПХ у випадку товстих металевих кілець є нехтовно малою.

Для власних частот поперечних ПХ, що поширюються навколо тонких,  $a \ll m/k_{\perp} \ll R$ , металевих кілець у НЧ діапазоні, можна одержати наступний асимптотичний вираз для поправки до власної частоти:

$$\omega^{(2)} = -\frac{\varepsilon_t^2}{8m^2} (2m^2 + m + 3) \omega_m^{(0)}, \quad (4.162)$$

в цьому випадку частота АПХ  $\omega_m^{(0)}$  визначається формулою (4.145). У ВЧ діапазоні значення власної частоти в нульовому наближенні  $\omega_m^{(0)}$  визначається формулою (4.143), а поправка до частоти в цьому випадку приблизно дорівнює

$$\omega^{(2)} = -\varepsilon_t^2 \frac{2m^2 - m + 2}{(k_{\perp} a)^2} \left( \frac{\delta}{a} \right)^2 m(m-1) \omega_m^{(0)}. \quad (4.163)$$

Радіальні залежності амплітуд сателітних гармонік поперечних ПХ у граничному випадку тонких кілець істотно розрізняються між собою,  $B_{\zeta}^{(\pm l)}(r) \propto r^{-|m \pm l|}$ , але завдяки розбіжності числових множників  $C_{\pm}$  ці амплітуди виявляються рівними за порядком величини на металевій поверхні.

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі показано можливість існування поперечних ПХ у магнітоактивній плазмі навколо поверхні металевих кілець. Визначено просторові розподіли (4.129) – (4.131), (4.156) і (4.158) полів поперечних ПХ. Показано, що урахування тороїдної неоднорідності зовнішнього магнітного поля призводить до того, що поперечні ХПТ поширюються в даній хвильовідній структурі у вигляді хвильового пакета. Амплітуди  $A_{m+N}$  сателітних гармонік  $\propto \exp[i(m+N)\vartheta]$  у такому пакеті є малими величинами,  $A_{m+N} \sim \varepsilon_t^N A_m$ , у порівнянні з амплітудою  $A_m$  основної гармоніки  $\propto \exp[im\vartheta]$ . Вплив тороїдної неоднорідності зовнішнього магнітного поля на амплітуду основної гармоніки виявляється в другому порядку малості за параметром тороїдності  $\varepsilon_t$ .

Визначено поправку (4.140) до власної частоти поперечних ПХ, яка обумовлена тороїдною неоднорідністю зовнішнього магнітного поля, що виявилася величиною другого порядку малості. Отримано наочні аналітичні вирази (4.160) - (4.163)

для власних частот поперечних ПХ, що поширюються в граничних випадках товстих і тонких металевих кілець у двох частотних діапазонах, у яких можуть існувати поперечні ПХ.

Відзначимо, що поперечні ПХ можуть існувати також і в тороїдних металевих хвильоводах, повністю заповнених плазмою. У цьому випадку поправка до власної частоти поперечних ПХ, яка обумовлена тороїдною неоднорідністю зовнішнього магнітного поля, дорівнює за порядком величини, але протилежна за знаком тій поправці, що отримана в цьому підрозділі.

#### 4.6. Поперечні поверхневі магнітоплазмові хвилі у хвильоводі круглого перерізу, який заповнено двома шарами $n$ – напівпровідників

У цьому підрозділі дослідимо вплив розбіжності електродинамічних властивостей напівпровідникових шарів, які повністю заповнюють круглий металевий хвильовід, на поширення поперечних ПХ [153].

Нехай симетричний уздовж осі  $Z$  ( $\partial/\partial z = 0$  у циліндричних координатах) металевий хвильовід круглого перерізу радіусу  $R$  буде повністю заповнений двома шарами різних напівпровідників  $n$  - типу. Один напівпровідниковий шар (з концентрацією  $n_{e1}$  вільних електронів, ефективною масою електронів  $M_1$  і діелектричною проникливістю ґратки  $\varepsilon_{01}$ ) заповнює верхню частину хвильоводу ( $0 < \varphi < \pi$ ). Другий напівпровідниковий шар ( $n_{e2}$  - концентрація вільних електронів,  $M_2$  – ефективна маса електронів провід-

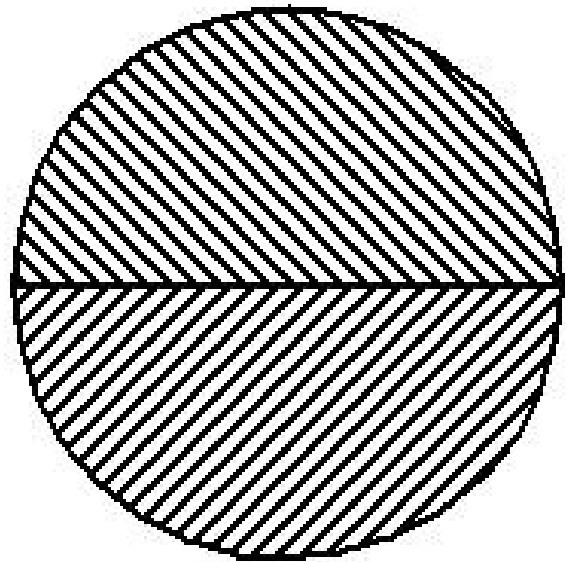


Рис. 4.18 Схематичне зображення перерізу металевого хвильоводу, який заповнено двома шарами  $n$  – напівпровідників.

ності і  $\varepsilon_{02}$  - діелектрична проникливість кристалічної ґратки) заповнює нижню частину хвилеводу ( $-\pi < \varphi < 0$ ). Зовнішнє магнітне поле спрямоване уздовж осі хвилеводу, тобто  $\vec{H}_0 \parallel \vec{z}$ , (див. рис. 4.18).

Досліджуємо поширення  $E$ - хвилі з компонентами поля  $E_r, E_\varphi, B_z$  ( $H$  - хвиля поверхневого типу з компонентами поля  $E_z, B_r, B_\varphi$  у хвилеводах зазначеної геометрії не поширюється [120]). У фізиці напівпровідників розглянуті ПХ називаються поверхневими магніто-плазовими поляритонами, а розглянутий випадок орієнтації магнітного поля щодо межі плазма - метал - геометрією Фойгта [81, 83, 119]. Електродинамічні властивості напівпровідникового плазового середовища визначаються компонентами тензора діелектричної проникливості:

$$\varepsilon_l(1) \equiv \varepsilon_l \quad (0 < \varphi < \pi) = \varepsilon_{01} + \frac{\omega_{pe1}^2}{\omega_{ce1}^2 - \omega^2}, \quad (4.164)$$

$$\varepsilon_2(1) \equiv \varepsilon_2 \quad (0 < \varphi < \pi) = \frac{\omega_{pe1}^2 \omega_{ce1}}{\omega(\omega_{ce1}^2 - \omega^2)}, \quad (4.165)$$

$$\varepsilon_l(2) \equiv \varepsilon_l \quad (-\pi < \varphi < 0) = \varepsilon_{02} + \frac{\omega_{pe2}^2}{\omega_{ce2}^2 - \omega^2}, \quad (4.166)$$

$$\varepsilon_2(2) \equiv \varepsilon_2 \quad (-\pi < \varphi < 0) = \frac{\omega_{pe2}^2 \omega_{ce2}}{\omega(\omega_{ce2}^2 - \omega^2)}, \quad (4.167)$$

$\omega_{pe}$  і  $\omega_{ce}$  - плазмова і циклотронна частоти електронів провідності відповідно першого і другого сортів (вважаємо, що  $\omega_{pe}^2 > \varepsilon_0 \omega_{ce}^2$ ). Періодичну кутову залежність компонентів  $\varepsilon_l$  і  $\varepsilon_2$  зручно виразити через східчасту узагальнену функцію

$$\theta(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(2j+1)\varphi}{2j+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{якщо } 0 < \varphi < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{якщо } -\pi < \varphi < 0. \end{cases} \quad (4.168)$$

З використанням функції  $\theta$  компоненти  $\varepsilon_{l,2}$  мають вигляд,

$$\varepsilon_{l,2} = \varepsilon_{l,2}^{(0)} + \varepsilon_{l,2}^{(1)} \theta(\varphi), \quad (4.169)$$

де

$$\varepsilon_{l,2}^{(0)} = 0.5 [\varepsilon_{l,2}(1) + \varepsilon_{l,2}(2)], \quad \varepsilon_{l,2}^{(1)} = 2/\pi [\varepsilon_{l,2}(1) - \varepsilon_{l,2}(2)]. \quad (4.170)$$

У цьому підрозділі розбіжність між властивостями напівпровідників вважається достатньо малою,  $|\varepsilon_{l,2}^{(1)}| \ll |\varepsilon_{l,2}^{(0)}|$ . Малість частки  $|\varepsilon_{l,2}^{(1)} / \varepsilon_{l,2}^{(0)}|$  дозволяє скористатися методом послідовних наближень для дослідження впливу неоднорідності напівпровідникового наповнення на дисперсійні властивості ПХ. За нульове наближення використовуємо дисперсійні властивості АПХ [120], які поширюються поперек аксіального зовнішнього сталого магнітного поля за азимуту у металевих хвилюводах, які повністю заповнено однорідною плазмою. Основні відомості про властивості цих АПХ наведено на початку Розділу 4.

Для спрощення даного аналітичного розгляду слід залишити спочатку у Фур'є - ряді (4.168) одну гармоніку  $\propto \sin(N\varphi)$ , а потім узагальнити здобуті результати на випадок нескінченного ряду. З урахуванням цього зауваження і відповідно до симетрії задачі (див. формули (4.168) - (4.170)) розв'язки рівнянь Максвелла для аксіального компонента магнітного поля хвилі шукаємо у вигляді

$$B_z = \{ (I_m(k_{\perp}^{(0)} r) + p(r)) + \sum_{j=0}^{\infty} [F_+^{(1)}(r) e^{iN\varphi} + F_-^{(1)}(r) e^{-iN\varphi} + F_+^{(2)}(r) e^{i2N\varphi} + F_-^{(2)}(r) e^{-i2N\varphi}] \} \exp(im\varphi - i\omega t), \quad N=2j+1, \quad (4.171)$$

де  $p(r)$  - поправка другого порядку малості ( $p \propto \varepsilon_l^{(1)2} I_m(k_{\perp}^{(0)} r)$ ) до амплітуди основної гармоніки,  $F_{\pm}^{(1)}$  і  $F_{\pm}^{(2)}$  - амплітуди перших і других сателітних гармонік ПХ.

Для обчислення амплітуд  $F_{\pm}^{(1)}$  перших сателітних гармонік поперечних ПХ підставимо вирази (4.171) для аксіального компонента магнітного поля хвилі  $B_z$  і (4.169) для компонентів тензора діелектричної проникливості до рівнянь Максвелла і виділимо в них доданки, пропорційні до Фур'є множників  $\exp[i(m \pm N)\varphi]$ . При цьому для  $F_{\pm}^{(1)}$  одержуємо неоднорідне рівняння Бесселя,

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{dF_{\pm}^{(1)}}{d\xi} - \left[ 1 + \frac{(m \pm N)^2}{\xi^2} \right] F_{\pm}^{(1)} = g^{(\pm)}, \quad \xi = k_{\perp}^{(0)} r, \quad (4.172)$$

де

$$g^{(\pm)} = \frac{c^2}{2i\omega^2} (N_{\perp}^{-2})^{(1)} I_m(\xi) \left( \frac{m}{r^2} \mp \frac{k_{\perp}^{(0)2}}{N} \right) - \frac{ic^2 k_{\perp}^{(0)}}{2\omega^2 r} I'_m(\xi) \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(1)}, \quad (4.173)$$

$(N_{\perp}^{-2})^{(l)}$  і  $(\mu/N_{\perp}^2)^{(l)}$  - поправки першого порядку, які обумовлено двошаровістю хвилеводного заповнення,

$$(N_{\perp}^{-2})^{(l)} = (N_{\perp}^{-2})^{(0)} \cdot \left[ \frac{\varepsilon_l^{(l)}}{\varepsilon_l^{(0)}} - 2 \frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(l)} - \varepsilon_l^{(0)} \varepsilon_l^{(l)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_l^{(0)2}} \right], \quad (4.174)$$

$$\left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(l)} = \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} \cdot \left[ \frac{\varepsilon_2^{(l)}}{\varepsilon_2^{(0)}} - 2 \frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(l)} - \varepsilon_l^{(0)} \varepsilon_l^{(l)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_l^{(0)2}} \right]. \quad (4.175)$$

Розв'язок рівняння (4.172) знаходимо методом варіації сталої,

$$F \varepsilon_{\pm}^{(l)} = f_{\pm}(r) + A^{(\pm)} I_{m \pm N}(\xi) + B^{(\pm)} K_{m \pm N}(\xi), \quad (4.176)$$

де частинний розв'язок рівняння (4.172) обираємо у вигляді,

$$f_{\pm}(r) = I_{m \pm N}(\xi) \int_{k_{\perp} R}^{\xi} g^{(\pm)} K_{m \pm N}(\xi) \xi d\xi - K_{m \pm N}(\xi) \int_0^{\xi} g I_{m \pm N}(\xi) \xi d\xi. \quad (4.177)$$

Константи інтегрування  $A^{(\pm)}$  і  $B^{(\pm)}$  визначаємо з крайових умов. Щоб забезпечити обмеженість полів хвилі на осі хвилеводу, де функція Макдональда  $K_m(\xi)$  має особливість, покладемо константи  $B^{(\pm)} = 0$ . Умови рівності нулю перших сателітних гармонік азимутального компонента електричного поля хвилі на круглій металевій поверхні радіуса  $R$  дозволяють визначити константу  $A^{(\pm)}$ ,

$$A^{(\pm)} = \left[ \frac{(m \pm N)}{r} \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} I_{m \pm N}(\xi) + \left( \frac{1}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} k_{\perp}^{(0)} I'_{m \pm N}(\xi) \right]^{-1} \quad (4.178)$$

$$\left[ -\frac{(m \pm N)}{r} \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} f_{\pm} \mp \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(l)} \frac{m}{2iNr} I_m(\xi) - \left( \frac{1}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} \frac{df_{\pm}}{dr} \mp \left( \frac{1}{N_{\perp}^2} \right)^{(l)} \frac{k_{\perp}^{(0)} I'_m(\xi)}{2iN} \right] \Big|_{\substack{\omega = \omega_m^{(0)} \\ r=R}}.$$

Відзначимо, що розв'язання задачі в першому наближенні за слабкою неоднорідністю напівпровідникового заповнення круглого хвилеводу не змінює амплітуду основної гармоніки хвилі. Внаслідок цього власна частота хвилі в цьому наближенні не відрізняється від свого значення, обчисленого в нульовому наближенні.



Визначити амплітуди  $F_{\pm}^{(2)}$  других сателітних гармонік ПХ можна аналогічно тому, як визначено амплітуди  $F_{\pm}^{(1)}$ . Тут не наведено ці вирази, бо амплітуди  $F_{\pm}^{(2)}$  входять тільки до визначення поправок до власної частоти більш високого порядку малості, ніж другого.

Щоб знайти поправки  $p(r)$  до амплітуди основної гармоніки ПХ, підставимо вирази (4.171) для поля хвилі  $B_z$  (з урахуванням уже відомих амплітуд  $F_{\pm}^{(1)}$  (4.176) перших сателітних гармонік) і (4.169) для компонентів тензора  $\varepsilon_{ij}$  до рівнянь Максвелла і виділимо в них доданки другого порядку малості, які є пропорційними до Фур'є множника  $\exp(im\varphi)$ . Тоді для цієї поправки  $p(r)$  дістаємо наступне рівняння,

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{dp}{d\xi} - \left[ 1 + \frac{m^2}{\xi^2} \right] p = -L, \quad (4.179)$$

де права частина дорівнює

$$\begin{aligned} L = & \frac{c^2}{\omega^2 r} (N_{\perp}^{-2})^{(1)} \frac{1}{2iN} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (F_{-}^{(1)} - F_{+}^{(1)}) + \frac{c^2}{\omega^2} (N_{\perp}^{-2})^{(2)} k_{\perp}^2 I_m(\xi) \\ & - \frac{c^2}{\omega^2 r^2} (N_{\perp}^{-2})^{(1)} \frac{1}{2iN} \left[ (m-N)^2 F_{-}^{(1)} - (m+N)^2 F_{+}^{(1)} \right] \\ & + \frac{c^2 i}{2\omega^2 r^2} (N_{\perp}^{-2})^{(1)} \left[ (m+N)F_{+}^{(1)} + (m-N)F_{-}^{(1)} \right] + \frac{ic^2}{2\omega^2 r} \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(1)} \left[ \frac{d}{dr} (F_{+}^{(1)} + F_{-}^{(1)}) \right]; \end{aligned} \quad (4.180)$$

поправка  $(N_{\perp}^{-2})^{(2)}$  другого порядку малості дорівнює,

$$\begin{aligned} (N_{\perp}^{-2})^{(2)} = & (N_{\perp}^{-2})^{(0)} \left[ \frac{\varepsilon_1^{(1)2} - \varepsilon_2^{(1)2}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} + 4 \left( \frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right) \right. \\ & \left. - 2 \frac{\varepsilon_1^{(1)} \varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.181)$$

Розв'язок рівняння (4.179), який є обмеженим на осі хвилеводу, має наступний вигляд,

$$p = K_m(\xi) \int_0^{\xi} L I_m(\xi) \xi d\xi - I_m(\xi) \int_{k_{\perp} R}^{\xi} L K_m(\xi) \xi d\xi + A_2 I_m(\xi). \quad (4.182)$$

Цей розв'язок (4.182) записується у вигляді суми частинного розв'язка (два перші

доданки, що мають інтегральне представлення) неоднорідного диференціального рівняння і загального розв'язку (третій доданок  $A_2 I_m(\xi)$ ) відповідного однорідного диференціального рівняння. У загальному виразі (4.171) для аксіального компонента магнітного поля хвилі доданок  $A_2 I_m(\xi)$  і амплітуда основної гармоніки у нульовому наближенні  $I_m(\xi)$  виявляються подібними доданками. Тобто константа інтегрування  $A_2$  відіграє роль поправки до нормувального множника, що у нульовому наближенні був обраний рівним одиниці. Тому константу  $A_2$  знаходять не з крайових умов, а з наступної умови, яка є аналогічною умові нормування хвильової функції в квантовій механіці [58],

$$\int_0^R \left[ 2p I_m(z) + |F_+^{(1)}|^2 + |F_-^{(1)}|^2 \right] r dr = 0. \quad (4.183)$$

Ця умова означає, що енергія магнітного поля хвилі, яку обчислено з урахуванням доданків другого порядку малості, збігається зі значенням, яке обчислено в нульовому наближенні. Разом з тим, вигляд дисперсійного рівняння, яке отримано нижче з урахуванням доданків другого порядку малості, не залежить від значення константи  $A_2$ .

Крайова умова на круглій металевій поверхні для основної гармоніки азимутального компонента електричного поля хвилі з урахуванням доданків другого порядку малості набуває у другому наближенні вигляду,

$$D^{(0)} + D^{(2)} = 0, \quad (4.184)$$

де

$$\begin{aligned} D^{(2)} = & \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} m p + \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(1)} \frac{(m-N)F_-^{(1)} - (m+N)F_+^{(1)}}{2iN} \\ & + \left( \frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(2)} m I_m(\xi) + (N_{\perp}^{-2})^{(0)} R \frac{dp}{dr} + \\ & (N_{\perp}^{-2})^{(1)} \frac{R}{2iN} \frac{d}{dr} (F_-^{(1)} - F_+^{(1)}) + (N_{\perp}^{-2})^{(2)} z I_m'(\xi) \Big|_{\substack{r=R \\ \omega=\omega_m}}. \end{aligned} \quad (4.185)$$

Поправка  $\left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2}\right)^{(2)}$  другого порядку малості в (4.185) дорівнює

$$\left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2}\right)^{(2)} = \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2}\right)^{(0)} \left[ \frac{\varepsilon_1^{(1)2} - \varepsilon_2^{(1)2}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} + 4 \left( \frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right)^2 - 2 \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right]. \quad (4.186)$$

Розв'язок дисперсійного рівняння (4.184) знайдемо у вигляді

$$\omega = \omega_m^{(0)} + \omega_m^{(2)}. \quad (4.187)$$

Поправки  $\omega_m^{(2)}$  до власної частоти ПХ, які обумовлено неоднорідністю двошарового заповнення хвильоводу, виявилися малими величинами другого порядку,

$$\omega_m^{(2)} = -D^{(2)} \left( \frac{\partial D_m^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\omega=\omega_m^{(0)}}. \quad (4.188)$$

Умова застосовності запропонованого рішення полягає в малості поправок,  $|\omega_m^{(2)}| \ll \omega_m^{(0)}$ , у порівнянні з основним доданком. Відзначимо, що вираз для  $D^{(2)}$  (4.185) містить дві групи доданків. Одна група складається з доданків, які є пропорційними до поправок другого порядку малості  $(\mu/N_{\perp}^2)^{(2)}$  (4.186) або  $(N_{\perp}^{-2})^{(2)}$  (4.181). Ці доданки враховують нескінченний набір Фур'є - гармонік у розкладанні (4.168). Доданки другої групи явно залежать від номера  $N$  Фур'є - гармоніки і є пропорційними до другого ступеню поправок першого порядку малості  $(N_{\perp}^{-2})^{(1)}$  (4.174) і/чи  $(\mu/N_{\perp}^2)^{(1)}$  (4.175). При визначенні власної частоти ПХ у вигляді (4.187) зазвичай досить врахувати в  $D^{(2)}$  доданки другої групи тільки з  $N=1$ . Якщо все-таки при цьому поправка (4.188) виявляється недостатньо малою, то до суми (4.187) варто додати наступний доданок, що обчислюється за формулою (4.188), опустивши при цьому доданки першої групи і підставивши в доданки другої групи  $N=3$  і т.д.

Власну частоту ПХ, що поширюються в неоднорідних хвильоводах великих розмірів,  $k_{\perp} R \gg |m|$ , можна порахувати в НЧ діапазоні (4.4) за допомогою наступного асимптотичного виразу:

$$\omega_m^{(2)} = \frac{3}{4N^2} \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \left( \frac{2\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} - \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_1^{(0)}} \right) \omega_m^{(0)}, \quad (4.189)$$

де основний доданок  $\omega_m^{(0)}$  визначено формулою (4.141), і у ВЧ діапазоні (4.5)

$$\omega_m^{(2)} = -\frac{3}{4} \frac{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)} N^2} \omega_m^{(0)}, \quad (4.190)$$

де основний доданок  $\omega_m^{(0)}$  визначається формулою (4.143). Як видно з аналізу виразів (4.189) і (4.190), у широких хвильоводах, у яких глибина  $k_{\perp}^{-1}$  проникнення поля до плазми є малою в порівнянні з радіусом хвильоводу  $R$ , даний підхід цілком можна застосовувати, бо розв'язок має вигляд ряду, який швидко сходиться. Поправки до частоти в цьому випадку є малими, і їхні значення швидко зменшуються з номером  $N$  Фур'є - гармоніки, що описує неоднорідність хвильоводу у формулах (4.168) і (4.169).

Для власних частот поперечних ПХ, що поширюються у вузьких,  $k_{\perp} R \ll |m|$ , хвильоводах із неоднорідним  $n$  – напівпровідниковим заповненням у НЧ діапазоні, можна здобути з (4.188) наступний асимптотичний вираз:

$$\omega_m^{(2)} = \frac{m}{8N} \left( \frac{2}{\xi} \right)^{N+2} \frac{m + 2N}{2m + N} \left( \frac{m^2}{\xi^2} \frac{\varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_1^{(0)}} \right)^2 \omega_m^{(0)}, \quad (4.191)$$

тут основний доданок  $\omega_m^{(0)}$  визначено формулою (4.145). У ВЧ діапазоні значення власної частоти в нульовому наближенні  $\omega_m^{(0)}$  визначається формулою (4.143), а поправка до частоти приблизно дорівнює,

$$\omega_m^{(2)} = \frac{-1}{64N} \left( \frac{2}{\xi} \right)^{N+2} \left( \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(1)} \right)^2 \frac{|m| + 2N}{2|m| + N} \frac{|m|^3 c^2}{R^2 \omega_{ce}^2} \omega_m^{(0)}. \quad (4.192)$$

Судячи з виразів (4.191) і (4.192), неоднорідність напівпровідникового заповнення унеможливорює поширення досліджуваних тут хвиль у вузьких хвильоводах, у яких глибина проникнення хвилі до плазми є великою в порівнянні з радіусом хвильоводу, оскільки поправки  $\omega^{(2)} \propto (k_{\perp} R)^{-N-2}$  при  $k_{\perp} R \ll |m|$ . Цей результат є очікуваним, бо у вузьких хвильоводах реалізуються погані умови для поширення поперечних ПХ вже в нульовому наближенні: їхня власна частота прагне до свого граничного значення, і групова швидкість хвилі прямує до нуля при зменшенні раді-

усу хвилеводу.

Підіб'ємо підсумки. Задачу про розподіл полів і власні частоти поперечних ПХ, що поширюються в круглому циліндричному хвилеводі з неоднорідним  $n$ -напівпровідниковим заповненням, розв'язано в цьому підрозділі як проміжний крок на шляху до дослідження поперечних ПХ у хвилеводі майже прямокутного перерізу з двошаровим заповненням, яке проведемо у наступному розділі. Разом із тим, ця задача має і самостійне значення. Відзначимо відмінність дисперсійних властивостей поперечних ПХ у випадку, розглянутому в цьому підрозділі, від АПХ у круглому циліндричному хвилеводі, заповненому двома коаксіальними шарами  $n$ -напівпровідника [230]. У випадку, що досліджено в цьому підрозділі, поперечні ПХ поширюються у вигляді хвильового пакета, тоді як у випадку коаксіальних шарів АПХ із різними азимутальними номерами мод поширюються незалежно. У розглянутому випадку періодична за азимутальним кутом (уздовж напрямку поширення хвилі) неоднорідність середовища відіграє роль структури, що уповільнює хвилі, тоді як наявність поздовжньої (стосовно напрямку поширення АПХ (див. [230])) різкої межі коаксіальних напівпровідникових шарів створює умови для поширення електромагнітних хвиль уздовж цієї межі (створюються умови для виникнення додаткового розв'язка дисперсійного рівняння).

#### 4.7. Висновки до четвертого розділу

У цьому розділі досліджено поширення хвиль поверхневого типу у плазмових хвилеводах круглого перерізу. Теорію азимутальних поверхневих хвиль, які поширюються за азимутальним кутом, узагальнено на випадок замагнічених хвилеводів, випадок хвилеводів тороїдної форми (включаючи поширення ХПТ навколо металевих кілець у тороїдному зовнішньому магнітному полі), а також на випадок ХПТ із малими значеннями аксіального хвильового числа.

Доведено можливість поширення у замагніченому плазмовому хвилеводі електромагнітного збурення ( $E$  – хвилі) іонного компонента вздовж азимутально-

го кута поперек зовнішнього аксіального магнітного поля.

Проаналізовано дисперсійні властивості електромагнітних ХПТ із довільним значенням азимутального номера моди і малим значенням аксіального хвильового числа при їхньому поширенні у хвилеводі циліндричної геометрії без магнітного поля, що складається з плазмового стовпа та діелектричного шару, охоплених металевим екраном. Розрахунки електродинамічної моделі джерела плазми, що використовує поширення АПХ для підтримання газового розряду, показали, що такий розряд буде характеризуватися досить однорідним профілем уздовж азимутального кута в режимі низького тиску робочого газу.

Теоретично доведено можливість поширення електромагнітних ХПТ із довільним значенням азимутального номера моди і малим значенням аксіального хвильового числа поперек аксіального зовнішнього магнітного поля на межі плазми з циліндричною металевою камерою. Показано, що за визначених умов такі незвичайні ХПТ можуть лінійно резонансно взаємодіяти із об'ємними звичайними хвилями. Ці умови реалізуються у широких хвилеводах із значною величиною зовнішнього магнітного поля.

Показано, що внаслідок неоднорідності зовнішнього тороїдного магнітного поля у тороїдних хвилеводах, що повністю заповнені плазмою, а також у густій плазмі навколо металевих кілець ХПТ поширюються за малим азимут у вигляді хвильових пакетів. Амплітуду сателітних гармонік таких ХПТ визначено як малу величину першого порядку. Поправку до власної частоти таких ХПТ пораховано як величину другого порядку малості за параметром тороїдності.

У цьому розділі також досліджено дисперсійні властивості ХПТ, які поширюються поперек аксіального зовнішнього магнітного поля у металевому хвилеводі круглого перерізу, який повністю заповнено двома шарами  $n$ -напівпровідників, так що діаметр слугує межею між цими шарами. Визначено розподіл полів і поправку до власної частоти ХПТ, яку обумовлено малою різницею в діелектричних властивостях напівпровідникового заповнення. Цю поправку пораховано як величину другого порядку малості.

## РОЗДІЛ 5

### ПОПЕРЕЧНІ ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ В ПЛАЗМОВИХ ХВИЛЕВОДАХ НЕКРУГЛОГО ПЕРЕРІЗУ

Найбільш ефективне збудження хвильоводних структур, у тому числі таких, що містять уповільнюючі елементи, як от гребінки, диски тощо, відбувається в діапазоні власних частот [113, 144, 231 - 240]. Саме цим викликано інтерес до дослідження спектрів багатокомпонентних магнітоактивних хвильоводів з уповільнюючими елементами. Зокрема, використання уповільнюючих елементів призводить до збільшення потужності ВЧ випромінювання в генераторах, побудованих на основі хвильоводів із плазмовим заповненням [70, 112]. У сучасних приладах ВЧ електроніки широко застосовуються багатокомпонентні хвильоводні структури [79, 80, 112 - 115, 241 - 243]. Наявність різних діелектричних і напівпровідникових вставок у металевому хвильоводі збільшує число власних мод хвильоводу і призводить до виникнення особливостей при поширенні хвиль у таких хвильоводах. Зокрема, у таких структурах можуть існувати хвилі поверхневого типу.

Дисперсійні властивості поверхневих хвиль на межі напівбезкінечної плазми з гофрованим ідеально провідним металом досліджено в роботі [244]. Але властивості ХПТ, що поширюється уздовж плоскої межі поділу двох середовищ і уздовж межі поділу із скінченним радіусом кривини, істотно відрізняються. У випадку плоскої межі [244] ХПТ є суто потенціальними, і частотний діапазон їхнього існування відрізняється від визначеного в роботі [90] діапазону існування АПХ.

У [229, 245, 246] зазначено, що ХПТ можуть бути відповідальними за небажане нагрівання периферійної плазми в термоядерних пастках і інтенсивну взаємодію частинок плазми зі стінкою камери, що, у свою чергу, призводить до забруднення плазми домішковими іонами й ушкодженню камери. Тому задача по дослідженню спектра поверхневих хвиль у магнітоактивному металевому хвильоводі некруглого перерізу, частково заповненого однорідною плазмою, може мати важливі практичні застосування також і в аналізі експериментів з керованого термоядерного синтезу.

### 5.1. Поширення поперечних поверхневих хвиль у вільному плазмовому хвилеводі некруглого перерізу

Цей підрозділ присвячено вивченню дисперсійних властивостей електромагнітних поверхневих хвиль (ПХ), які поширюються впоперек осі симетрії металевого хвилеводу некруглого перерізу із плазмовою вставкою без використання зовнішнього сталого магнітного поля [156, 247]. Хвилевод вважаємо однорідним уздовж вісі циліндру:  $\partial/\partial z \equiv 0$ . Радіус  $R_2$  металевого хвилеводу змінюється за законом:

$$R_2 = R_1 \cdot \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(n\varphi - \varphi_n) \right], \quad (5.1)$$

де  $R_1$  - середнє значення величини радіусу металевого хвилеводу (див. рис. 5.1),  $h_n \ll 1$  - відносна глибина гофрування стінки хвилеводу.

Плазмову вставку розташовано коаксіально всередині металевого хвилеводу. Вона являє собою циліндричний стовп газової або напівпровідникової плазми радіусу  $R_0$ , для величини якого виконується нерівність  $h_n < R_2 R_0^{-1} - 1 < 1$ . У на-

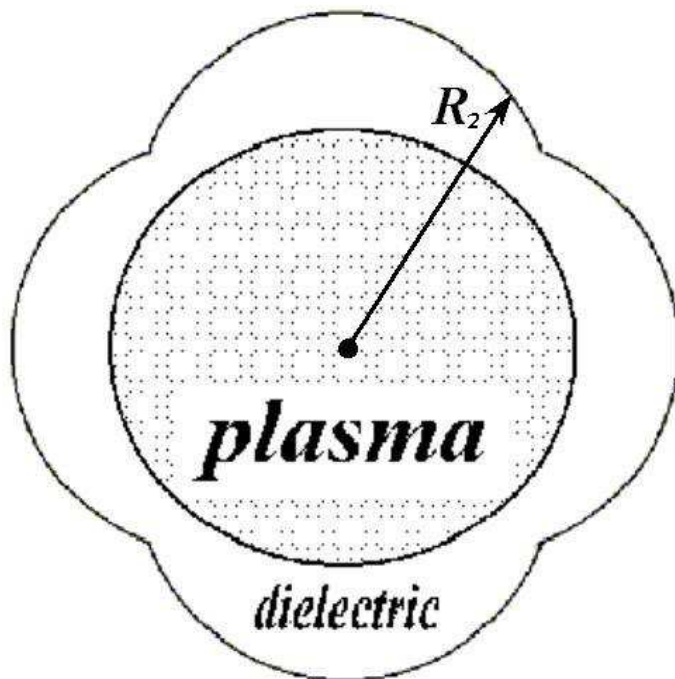


Рис. 5.1 Схематичне зображення досліджуваного плазмового хвилеводу.

ближенні вільної холодної плазми її діелектрична проникливість має вигляд:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \omega^{-2}, \text{ де } \varepsilon_0 - \text{діе-}$$

лектрична проникливість кристалової ґратки напівпровідника, а у випадку газової плазми  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\omega_{p\alpha}$  - ленгмюрівська частота, індекс  $\alpha$  вказує тип частинок: іони, електрони, дірки. Область  $R_0 < r < R_2$  заповнено діелектриком із проникливістю



$$\varepsilon_g \geq 1.$$

Нагадаємо, що у випадку планарного хвильоводу задачу про вплив гофрування металевої поверхні на дисперсійні властивості ПХ розглянуто у роботі [244]. Але при цьому слід відзначити, що дисперсійні властивості ПХ, які поширюються вздовж криволінійної межі, наприклад, за азимутальним кутом у циліндричних хвильоводах, та топологія їх поля суттєво відрізняються від властивостей тих ПХ, які поширюються вздовж прямої межі плазми [109]. Так, наприклад, ПХ, які розглянуто в роботі [244], є потенціальними, їхня фазова швидкість є значно меншою за швидкість світла у вакуумі, тоді як АПХ - це електромагнітні хвилі. Частотний діапазон існування АПХ у випадку холодної плазми без сталого магнітного поля визначається нерівністю  $\varepsilon_0 \omega^2 < \Omega_e^2 + \Omega_i^2$ .

Розв'язуючи рівняння Максвелла в області плазми  $r \leq R_0$  та області діелектрика  $R_0 < r < R_2$ , що відокремлює плазму від металевої стінки хвильоводу, дістаємо просторовий розподіл полів поперечних ПХ у запропонованій структурі:

$$E_r = \frac{i}{\varepsilon k r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z, \quad (5.2)$$

$$E_\varphi = \frac{-i}{\varepsilon k} \frac{\partial}{\partial r} H_z, \quad (5.3)$$

$$H_z = \sum_m H_z^{(m)}(r) \exp(im\varphi), \quad H_z^{(m)} = C_1^{(m)} I_m(r \kappa_p) + C_2^{(m)} K_m(r \kappa_p), \quad (5.4)$$

коли  $r \leq R_0$ ,

$$E_r = \frac{i \varepsilon_g^{-1/2}}{\kappa_g r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z, \quad (5.5)$$

$$E_\varphi = \frac{i \varepsilon_g^{-1/2}}{-\kappa_g} \frac{\partial}{\partial r} H_z, \quad (5.6)$$

$$H_z^{(m)} = C_3^{(m)} J_m(r \kappa_g) + C_4^{(m)} N_m(r \kappa_g), \quad (5.7)$$

коли  $R_0 \leq r \leq R_2$ . Тут  $J_m(z)$ ,  $I_m(z)$ ,  $N_m(z)$ ,  $K_m(z)$  - відповідно функція Бесселя першого роду, модифікована функція Бесселя, функція Неймана та функція Макдональ-

да [226],  $C_{1,2,3,4}^{(m)}$  - константи інтегрування,  $\kappa_p = k\sqrt{|\varepsilon|}$ ,  $k_c = \omega$ ,  $\kappa_g = k\sqrt{\varepsilon_g}$ .

Для спрощення викладення матеріалу обмежимося спочатку розглядом випадку  $R_2 = R_1[1 + h_N \sin(N\varphi)]$ . Після чого узагальнимо результати, які отримаємо, на випадок довільного (5.1) перерізу хвилеводу. Вибір залежності  $R_2(\varphi)$  у такому спрощеному вигляді має також і самостійне значення. При  $N=1$  ця залежність зображує розцентрівку (порушення коаксіальності) плазмового стовпа та металевій камери. Випадок  $N=2$  описує еліпсоїдність камери,  $N \geq 3$  - відповідає уповільнюючій структурі з кутовим періодом  $2\pi/N$ .

Для отримання дисперсійного рівняння скористаємося такими крайовими умовами:

$$H_z(r=0) < \infty, \quad (5.8)$$

$$E_\varphi(R_0+0) = E_\varphi(R_0-0), \quad (5.9)$$

$$H_z(R_0+0) = H_z(R_0-0), \quad (5.10)$$

$$E_r(R_2) \propto R_2(\varphi) E_\varphi(R_2) + E_r(R_2) \frac{dR_2}{d\varphi} = 0. \quad (5.11)$$

Застосування крайових умов (5.8) – (5.11) до полів поперечних ПХ (5.2) – (5.7) дозволяє отримати дисперсійне рівняння ПХ у хвилеводі некруглого перерізу. Аналітично воно розв'язується методом послідовних наближень.

У нульовому наближенні ( $h_N=0$ ) ПХ з різними азимутальними номерами розповсюджуються незалежно одна від одної. Для області  $R_0 < r < R_2$  маємо у цьому наближенні

$$H_z^{(m)} = 0,5\pi \kappa_g R_0 C_1 L_m(\kappa_g r), \quad (5.12)$$

де

$$L_m(\kappa_g r) = G_1 J_m(\kappa_g r) - G_2 N_m(\kappa_g r), \quad (5.13)$$

$$G_1 = \sqrt{\varepsilon_g / |\varepsilon|} I'_m(\kappa_p R_0) N_m(\kappa_g R_0) + I_m(\kappa_p R_0) N'_m(\kappa_g R_0), \quad (5.14)$$

$$G_2 = \sqrt{\varepsilon_g / |\varepsilon|} I'_m(\kappa_p R_0) J_m(\kappa_g R_0) + I_m(\kappa_p R_0) J'_m(\kappa_g R_0), \quad (5.15)$$

символ “штрих” означає похідну за аргументом. Решту компонентів поля ПХ мо-

жна виразити через  $H_z$  згідно рівнянь (5.5) і (5.6). Крайову умову на тангенційний компонент електричного поля ПХ слід переписати у цьому наближенні так:  $E_\varphi(R_1)=0$ . З її допомогою можна знайти дисперсійне рівняння АПХ, які поширюються вздовж азимуту у хвилеводі круглого перерізу [109]:

$$\frac{J'_m(\kappa_g R_0) N'_m(\kappa_g R_l) - J'_m(\kappa_g R_l) N'_m(\kappa_g R_0)}{J_m(\kappa_g R_0) N'_m(\kappa_g R_l) - J'_m(\kappa_g R_l) N_m(\kappa_g R_0)} = - \left[ \frac{\varepsilon_g}{|\varepsilon|} \right]^2 \frac{I'_m(\kappa_p R_0)}{I_m(\kappa_p R_0)}. \quad (5.16)$$

У першому наближенні за параметром гофрування  $h_N$  магнітне поле ПХ в області  $R_0 < r < R_2$  слід записати у вигляді суми:

$$H_z = 0,5\pi\kappa_g R_0 C_l \{ L_m(\kappa_g r) \exp(im\varphi) + H_+ h_N L_{m+N}(\kappa_g r) \exp[i(m+N)\varphi] + H_- h_N L_{m-N}(\kappa_g r) \exp[i(m-N)\varphi] \} \exp(-i\omega t). \quad (5.17)$$

Аби  $H_z$  у вигляді (5.17) задовольняло крайовим умовам (5.10) із точністю до доданків першого порядку за малим параметром гофрування, коефіцієнти  $H_\pm$  повинні мати такі значення:

$$H_\pm = \pm \frac{iL_m(\kappa_g R_l)(m^2 \pm mN - \kappa_g^2 R_l^2)}{2\kappa_g R_l L'_{m\pm N}(\kappa_g R_l)}. \quad (5.18)$$

Розв'язуючи дисперсійне рівняння у другому наближенні за параметром гофрування  $h_N$ , визначимо частоту ПХ  $\omega$  у вигляді суми  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega_N$ , де  $\omega_0$  - власна частота ПХ у відсутності гофрування ( $h_N=0$ ),  $\Delta\omega_N$  - поправка до частоти ПХ, яка обумовлена відміною форми перерізу хвилеводу від круглої. Вираз для  $\Delta\omega_N$  має такий вигляд,

$$\Delta\omega_N = \frac{h_N^2(m^2 + R_l^2\kappa_g^2)}{4\kappa_g R_l} \frac{L_m(\kappa_g R_l)}{dL'_m(\kappa_g R_l)} \left[ 1 + \frac{L_{m+N}(\kappa_g R_l)}{L'_{m+N}(\kappa_g R_l)} \frac{(m^2 + mN - \kappa_g^2 R_l^2)^2}{m^2 + \kappa_g^2 R_l^2} + \frac{L_{m-N}(\kappa_g R_l)}{L'_{m-N}(\kappa_g R_l)} \frac{(m^2 - mN - \kappa_g^2 R_l^2)^2}{m^2 + \kappa_g^2 R_l^2} \right]. \quad (5.19)$$

Вираз (5.19) для поправки до частоти ПХ  $\Delta\omega_N$  не залежить від знаку азимутального хвильового числа  $m$ . Це явище взагалі є типовим для поверхневих коли-

вань в ізотропних плазмових хвильоводах [115]. Користуючись рекурентними співвідношеннями та асимптотичними виразами для Бесселевих функцій [226], можна знайти наближені формули для поправок  $\Delta\omega_N$  у випадках широких ( $\kappa_{g,p}R_l \gg |m|$ ) та вузьких ( $\kappa_{g,p}R_l \ll 1$ ) хвильоводів.

У випадку вузьких хвильоводів поправка  $\Delta\omega_N < 0$ . Наведемо аналітичний вираз для неї:

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_0} \approx \frac{-h_N^2 \Lambda \varepsilon_g |\varepsilon|}{16\pi m!} \frac{m^2 (m+N)(m+N)!}{\Lambda m^2 |\varepsilon| + 2\varepsilon_g (1+|\varepsilon|)} \left[ \frac{2}{\kappa_g R_l} \right]^{2+N}, \quad (5.20)$$

де  $\Lambda = 1 - R_0 / R_l$ , цей параметр, який характеризує відносну товщину діелектричного прошарку, вважався малим. Аналіз виразу (5.19) свідчить про те, що для досить широких хвильоводів, з огляду на величину похідної  $(dL'_m(\kappa_g R_l)/d\omega_0)$ , може існувати ефект зміни знаку поправки  $\Delta\omega_N$ . Тобто коли в граничному випадку  $R_l \rightarrow \infty$ , то поправка  $\Delta\omega_N$  стає додатною величиною. Це відбувається у випадку виконання нерівності:

$$\Lambda \frac{R_0 \omega_{pe}}{c} > 1 > \Lambda \frac{k R_0 \varepsilon_g}{|\varepsilon_p|^{1/2}}. \quad (5.21)$$

Але слід мати на увазі, що для ПХ, які досліджуються, частота зменшується до нуля, коли  $R_l$  прямує до нескінченності, а придатність аналітичного виразу (5.19) для поправки до частоти ПХ визначається виконанням нерівності  $|\Delta\omega_N| \ll \omega_0$ . Тому тут в межах методу послідовних наближень отримано результати, в першу чергу вираз (5.19) для поправки до частоти ПХ  $\Delta\omega_N$ , що мають обмежений діапазон використання у випадку  $\Lambda R_0 \gg c / \omega_{pe}$ . Коли умови (5.21) не виконуються

$\left( 1 < \Lambda k R_0 \varepsilon_g |\varepsilon_p|^{-1/2} \right)$ , тобто для великих значень  $(\kappa_g R_0)$ , для  $\Delta\omega_N$  можна записати

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_0} \approx -0.25 h_N^2 \varepsilon_g (1 + \Lambda) \kappa_g^2 R_l^2 \cdot (k R_l \gg 1) \quad (5.22)$$

Порівнюючи (5.20) та (5.22), слід відзначити дві суттєві розбіжності між короткохвильовими збуреннями та довгохвильовими. У випадку  $(\kappa_g R_0) \ll 1$  вели-

чина  $|\Delta\omega_N|/\omega_0$  зменшується при збільшенні  $\varepsilon_g$  та зменшенні кількості гофрів у хвилеводі, тобто параметра  $N$ . Темп уповільнення довгохвильових ПХ не залежить від параметрів  $m$  та  $N$ , а величина  $|\Delta\omega_N|/\omega_0 \propto \varepsilon_g^2$ . Сама величина  $\Delta\omega_N$  при  $kR_l \gg 1$  із збільшенням  $\varepsilon_g$  зменшується.

З розгляду, який проведено, видно, що величина поправки  $\Delta\omega_N$  не залежить від наявності у рівнянні поверхні (5.1) малих доданків  $\propto \sin(n\varphi)$  ( $n \neq N$ ). Тому у випадку довільного (5.1) перерізу хвилеводу власну частоту можна знайти у вигляді,

$$\omega = \omega_0 + \sum_{n \neq 2m} \Delta\omega_n, \quad (5.23)$$

де поправки  $\Delta\omega_n$  визначені формулою (5.19).

Результати числових досліджень величини поправки до частоти ПХ, яка обумовлена відмінністю форми перерізу хвилеводу від круглої, наведено на рис. 5.2 та 5.3 відповідно у випадках  $N=1$  та  $N=4$ . Цифрами на малюнках позначено номери мод  $m$ . Показано залежності  $(\Delta\omega_n/\omega_{pe})$  від ефективного безрозмірного хвильового числа  $k_{ef}=mc/(R_0\omega_{pe})$ . Аби рис. 5.2 і 5.3 були більш наочними, для збільшення масштабу малий параметр гофрування обрано рівним  $h_1=0.7$  та  $h_4=0.25$  (як відзначалось, насправді  $h_n$  мають бути малими). Числові розрахунки вказують на те, що найбільший вплив на величину поправки  $\Delta\omega_n(k_{ef})$  справляє товщина діелектричного прошарку – параметр  $A$ . Так, збільшення  $\varepsilon_g$  від 1 до 5 (при незмінних інших параметрах), приблизно удвічі зменшує як  $\omega_0$  так і  $\Delta\omega_n$ , у бік більших значень ефективного хвильового числа пересувається точка  $\Delta\omega_n = 0$ . В цілому збільшення  $\varepsilon_g$  зменшує частоту ПХ, тобто відбувається погіршення умов її поширення. А зменшення  $A$  від 0.3 до 0.1 (при незмінних інших параметрах) неістотно зменшує власну частоту ПХ, в той час як  $|\Delta\omega_n(k_{ef})|$  приблизно у сім разів збільшується для ПХ з  $m=1$ , - удвічі для ПХ із  $m=2$ . Це зростання абсолютної величини поправки до частоти ПХ стає менш вагомим при збільшенні  $k_{ef}$  та азимутального хвильового числа  $m$ . Слід зазначити, що криві  $\Delta\omega_n(k_{ef})$  із зменшенням  $A$  стають

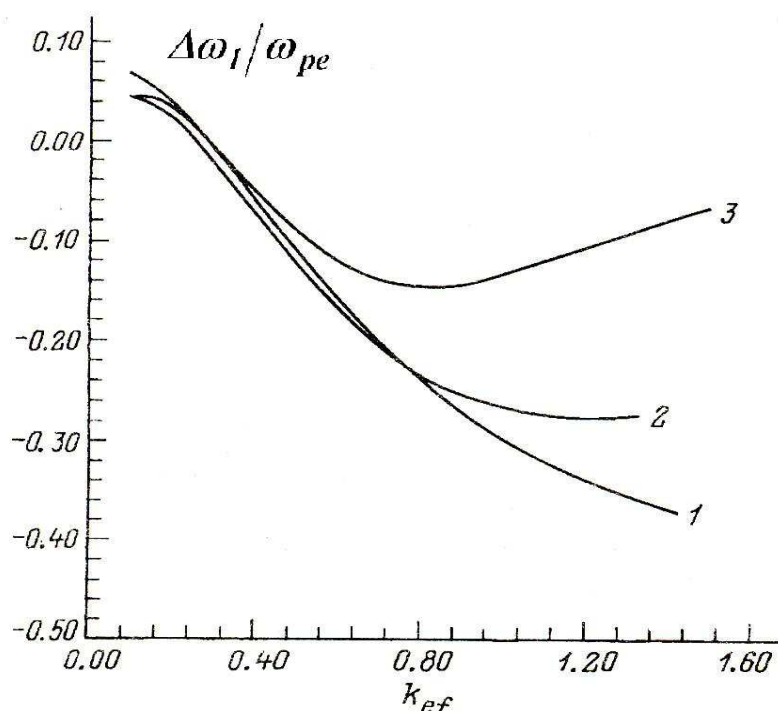


Рис. 5.2 Залежність поправки до власної частоти, яка обумовлена порушенням коаксіальності плазмової вставки і металевої камери хвильоводу, нормованої на електронну плазмову частоту, від ефективного хвильового числа.

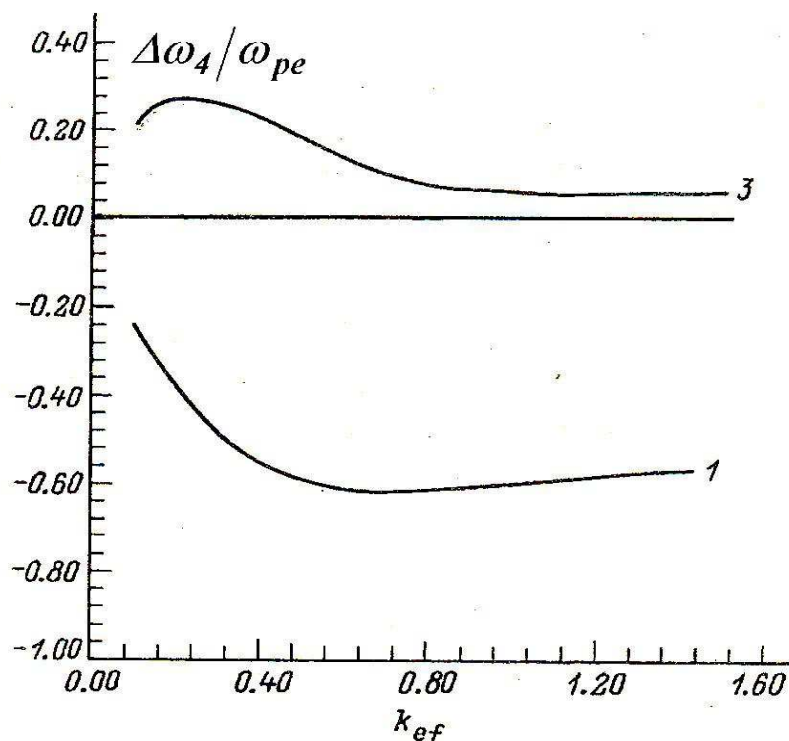


Рис. 5.3 Залежність поправки до власної частоти, яка обумовлена відмінністю форми перерізу хвильоводу від кола, нормованої на електронну плазмову частоту, від ефективного хвильового числа.

більш положистими, а абсолютна величина поправки зростає при збільшенні  $k_{ef}$ . Зростання кількості періодів гофрування (параметра  $N$ ) призводить до більшого гальмування ПХ.

Радіальний розподіл полів ПХ у гофрованому хвилеводі зображено на рис. 5.4 для наступних значень параметрів хвилеводу:  $h_N=0.1$ ,  $m=3$ ,  $N=4$ ,  $\varepsilon_g=1$ ,  $\varphi=0$ . При цьому амплітуду ПХ обчислено у відносних одиницях, а радіальну координату нормовано на радіус хвилеводу  $R_1$ . Оскільки ПХ, які досліджуються, є електромагнітними, то магнітний компонент поля їх більше або порядку електричного компонента, коли частота ПХ лежить у середині діапазону існування АПХ. Відзначимо, що в області діелектрика,  $R_0 < r < R_2$ , найбільшу величину має поле  $E_r$  (воно має розрив на межі плазма – діелектрик і не прямує до нуля, коли  $r \rightarrow R_2$ ), а поле  $E_\varphi$ , яке утворюється поверхневими зарядами, досягає максимального значення саме на межі плазмового циліндру з діелектричним прошарком ( $r=R_0$ ).

Електродинамічну структуру та її власні хвилі, які досліджено у цьому під

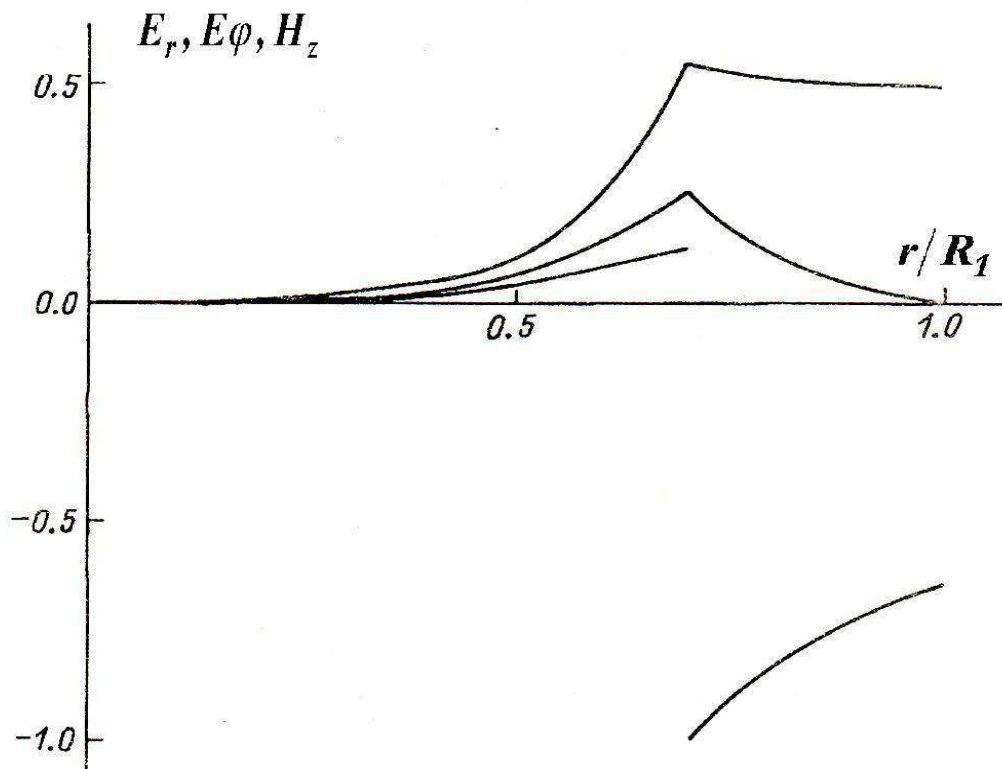


Рис. 5.4 Радіальний розподіл полів поперечних ПХ.

розділі, можна використовувати у різних радіотехнічних пристроях, наприклад, у випромінювачах та генераторах НВЧ енергії. Як відомо [248], енергію цих електромагнітних ПХ досить просто можна вивести крізь невелике за кутовими розмірами віконце у металевому кожусі хвилеводу. Якщо вздовж осі симетрії хвилеводу розташувати антену у вигляді дротинки, радіус якої був би малим (це необхідно для того, щоб можна було знехтувати її впливом на електродинамічні властивості хвилеводу), то таку структуру слід було б розглядати, як антену з плазмовим покриттям. Слід відзначити, що використання плазмового покриття у антен давно відоме та використовується на практиці. Так, наприклад, у роботі [249] наведено розрахунки випромінювання сфероїдальною антеною із плазмовим покриттям. Наявність цього покриття призводить до підвищення енергії випромінювання. Наявність плазми у робочому просторі електронної лампи, яка працює на хвилі, що біжить, призвела до збільшення потужності генератора [250]. Таким чином, результати, які отримані у даній роботі, становлять певний інтерес для радіофізики та розробки радіоелектронних приладів.

## 5.2. Розщеплення спектрів поперечних поверхневих хвиль в плазмовому хвилеводі некруглого перерізу без використання зовнішнього магнітного поля

АПХ у круглих вільних плазмових хвилеводах є взаємними: частоти АПХ, що поширюються з азимутальними хвильовими числами протилежного знака, є однаковими, що взагалі характерно для ізотропних хвилеводів [115]. Цей підрозділ присвячено дослідженню розщеплення спектрів електромагнітних хвиль, що поширюються за азимуту поблизу поверхні однорідного плазмового циліндра без використання сталого магнітного поля, який відокремлено від металевого хвилеводу діелектричним шаром, товщина якого змінюється уздовж азимута, [150]. Розглянуто випадки відмінності від круглого циліндра меж плазма - діелектрик і діелектрик - метал. Вивчено просторовий розподіл полів цих хвиль. Визначено поправку до власних частот поперечних ПХ, що обумовлена малою відмінністю меж поділу середовищ від круглого циліндра. Показано, що періодична



зміна товщини діелектричного шару уздовж напрямку поширення хвилі призводить до розщеплення спектрів поперечних ПХ, якщо кутовий період неоднорідності дорівнює половині періоду хвилі.

Дослідимо поширення електромагнітної ПХ поблизу межі однорідного плазмового циліндра радіуса  $R_1$  (див. рис.5.5):

$$R_1(\varphi) = a \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_n \cos(n\varphi + \varphi_n)] \right\}, \quad (5.24)$$

який відокремлено від металевої камери радіуса  $R_2$ ,

$$R_2(\varphi) = b \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [h_n \cos(n\varphi + \psi_n)] \right\}, \quad (5.25)$$

діелектриком із проникливістю  $\varepsilon_g \geq 1$ . Запис форм перерізу хвилеводу у вигляді залежностей (5.24) і (5.25) дозволяє моделювати будь-яку форму поперечного перерізу хвилеводу, наприклад, прямокутну [148] чи ту, яка характерна для поверхні анодного блоку магнетрона. Величини параметрів  $\delta_n$  і  $h_n$ , що визначають максимальне відхилення радіусів  $R_1$  і  $R_2$  меж поділу від їхніх середніх значень  $a$  і  $b$ , вважаємо малими ( $\delta_n, h_n < (b/a - 1) < 1$ ).

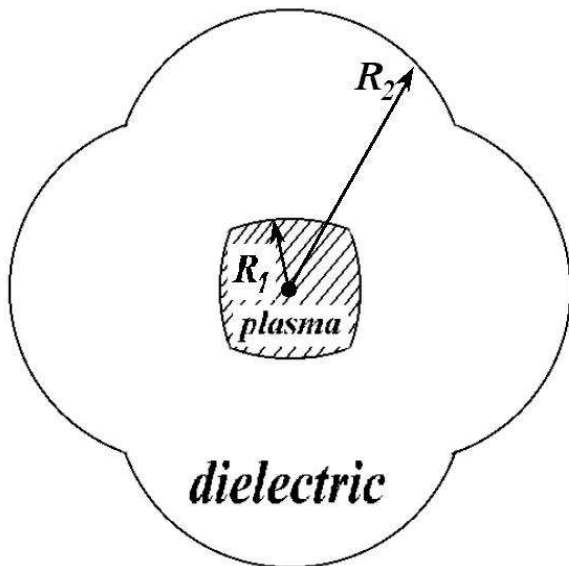


Рис. 5.5 Схематичне зображення досліджуваного плазмового хвилеводу.

Розглядаємо випадок холодної плазми без сталого магнітного поля, її діелектрична проникливість дорівнює  $\varepsilon = \varepsilon_0 - \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \omega^{-2}$ . Хвилевод вважаємо однорідним уздовж осі циліндра:  $\partial/\partial z \equiv 0$ . Досліджуємо хвилі  $E$ -типу з компонентами  $E_r$ ,  $E_\varphi$  і  $H_z$ . Для магнітного поля  $H_z$  ПХ у плазмі ( $r \leq R_1$ ) з рівнянь Максвелла одержуємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H_z}{\partial r} - \left[ \kappa_p^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] H_z = 0, \quad (5.26)$$

де  $\kappa_p = k \sqrt{|\varepsilon|}$ ,  $kc = \omega$ . Компоненти  $E_r$  і  $E_\varphi$  електричного поля ПХ виражаються через  $H_z$  за допомогою формул (5.2) і (5.3).

В області діелектричного шару ( $R_1 < r < R_2$ ) розподіл полів  $H_z$ , а також  $E_r$  і  $E_\varphi$  визначається рівнянням (5.26) і виразами (5.2), (5.3) при заміні в них  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_g$ .

Виходячи із симетрії задачі, розв'язок рівняння (5.26) шукаємо у вигляді рядів Фур'є (5.4) і (5.7).

Для одержання дисперсійного рівняння використовуємо наступні крайові умови:

- обмеженість полів ПХ у розглянутому об'ємі, зокрема, (5.8);
- неперервність тангенціального електричного поля  $E_r(R_1) \propto R_1(\varphi)E_\varphi(R_1) + E_r(R_1)\partial R_1/\partial \varphi$  і магнітного поля  $H_z$  на межі плазма - діелектрик,

$$E_r(R_1+0) = E_r(R_1-0), \quad H_z(R_1+0) = H_z(R_1-0); \quad (5.27)$$

- рівність нулю тангенціального електричного поля на поверхні металу (5.11).

Задачу розв'язуємо за теорією збурень. За нульове наближення використовуємо теорію АПХ, що поширюються за азимутом в круглих ізотропних циліндричних плазмових хвилеводах. Їхні властивості детально вивчені в [108]. Основні, необхідні для подальшого дослідження, відомості було наведено в підрозділі 5.1.

Крайова умова (5.27) для тангенціального компонента електричного поля ПХ на круглій межі діелектрик - метал набуває вигляду  $E_\varphi(b) = 0$ . Звідси одержуємо дисперсійне рівняння АПХ [108] у вигляді

$$D_m^{(0)} = 0, \quad (5.28)$$

де

$$D_m^{(0)} \equiv (a/\kappa_g)I_m(\kappa_p a)L'_m(\kappa_g a) + (a/\kappa_p)I'_m(\kappa_p a)L_m(\kappa_g a). \quad (5.29)$$

Розв'язок цього рівняння в наближенні вузького діелектричного шару ( $\Lambda \equiv (b/a-1) \ll 1$ ) докладно вивчено в [108], тому його тут не наведено. Відзначимо тільки, що дисперсія АПХ є прямою (її частота зростає зі збільшенням ефективно-

го азимутального хвильового числа  $k_{ef}=(m\delta)/a$ , де  $\delta=c/\Omega_e$  глибина скін - шару). На рис. 5.6 і 5.7 суцільними лініями зображено залежність частоти АПХ, нормованої на електронну плазмову частоту  $(\omega_m^{(0)}/\omega_{pe})$ , від  $k_{ef}$ . Розрахунки проведено для таких значень параметрів хвилеводу:  $\varepsilon_g = 1$ ;  $\Lambda=0.3$ ;  $m=1$  на рис. 5.6 і  $m=2$  на рис. 5.7.

Дослідимо спочатку поперечні ПХ у хвилеводі з некруглою металевою камерою, тобто припустимо спочатку, що ПХ поширюються в круглому плазмовому циліндрі радіуса  $a$ , відділеному діелектричним шаром від металевої камери радіуса  $R_2$  (див. визначення (5.25)). Оскільки АПХ із різними азимутальними номерами  $m$  поширюються незалежно, вважаємо, що в нульовому наближенні існують гармоніки тільки з азимутальними номерами  $\pm M$ . Обидві гармоніки поширюються в нульовому наближенні на однакових частотах  $\omega_M^{(0)}$ , які є розв'язком дисперсійного рівняння (5.28),  $D_M^{(0)}(\omega_M^{(0)})=0$ . Частоти хвиль з кутовим періодом основних гармонік  $(2\pi/M)$  розщеплюються, якщо в рівнянні металевої поверхні (5.25) є малий доданок з  $n=2M$ . При цьому згідно з теорією збурень у випадку виродженого спектра [58] розв'язок рівняння (5.26) в області діелектрика знаходимо з урахуванням доданків першого порядку малості у вигляді стоячих хвиль:

$$H_z(r, \varphi, t) = \frac{\pi}{2} \kappa_g a \exp(-i\omega t) \times \{C_{11} L_M(\kappa_g r) [\exp(iM\varphi) \pm i \exp(-iM\varphi)] + C_r L_{3M}(\kappa_g r) [\exp(i3M\varphi) \pm i \exp(-i3M\varphi)]\}. \quad (5.30)$$

Тут константа  $C_{11}$  визначає амплітудне значення основної гармоніки ПХ, а малий коефіцієнт,

$$C_r = \frac{-ih_{2M} L_M(\kappa_g a)}{2\kappa_g a L'_{3M}(\kappa_g a)} (\kappa_g^2 a^2 - 3M^2) C_{11}, \quad (5.31)$$

визначається з умови рівності нулю на металевій поверхні амплітуд сателітних  $(\propto \exp(\pm i3M\varphi))$  гармонік тангенціального електричного поля хвилі.

Умова рівності нулю на металевій поверхні амплітуд основних  $(\propto \exp(\pm i3M\varphi))$  гармонік тангенціального електричного поля хвилі призводить до дисперсійного рівняння, що має вигляд секулярного рівняння,

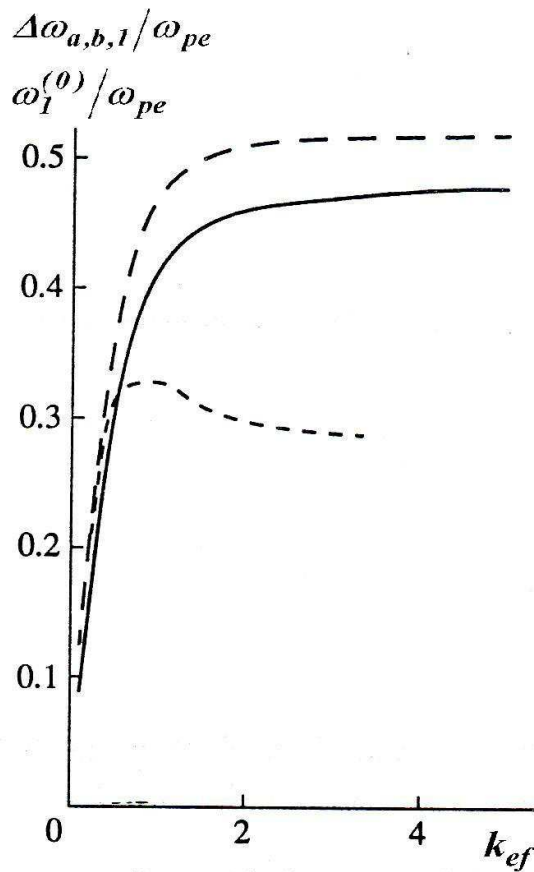


Рис. 5.6 Частота поперечних поверхневих хвиль з азимутальним хвильовим числом основних гармонік  $M=1$  (суцільні лінії) і величини їхнього розщеплення, обумовленого відмінністю форми перерізу металевої камери від кола (короткі штрихи) і відмінністю форми перерізу плазмового циліндра від кола (довгі штрихи), у залежності від ефективного азимутального хвильового числа.

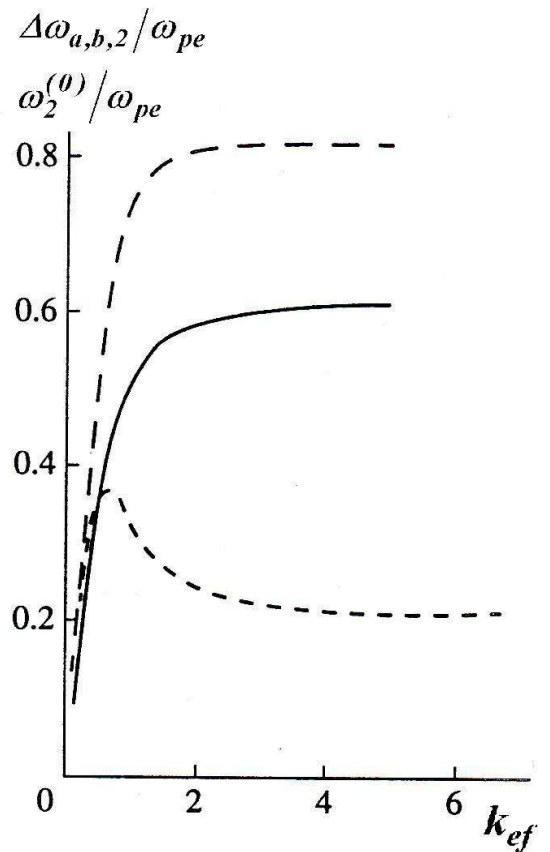


Рис. 5.7 Та сама залежність, що і на рис. 5.6, але для поперечних поверхневих хвиль з азимутальним хвильовим числом основних гармонік  $M=2$ .

$$(D_M^{(0)})^2 - (D_M^{(1)})^2 = 0, \quad (5.32)$$

де  $D_M^{(1)}$  є величиною першого порядку малості. Розв'язок дисперсійного рівняння (5.32) знаходимо у вигляді  $\omega = \omega_M^{(0)} \pm \Delta\omega_{b,M}$ , де поправка

$$\Delta\omega_{b,M} \equiv D_M^{(1)} \left( \frac{\partial D_M^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \bigg|_{\omega = \omega_M^{(0)}}$$

$$= \frac{h_{2M} L_M(\kappa_g a)}{2\kappa_g a} (M^2 + \kappa_g^2 a^2) \left( \frac{\partial L'_M(\kappa_g a)}{\partial \omega} \right)^{-1}_{\omega=\omega_M^{(0)}}. \quad (5.33)$$

Вираз (5.33) спрощується у випадку плазмового циліндра великих розмірів ( $\kappa_p a \gg 1$ ):

$$\Delta\omega_{b,M} = -\frac{h_{2M} M}{4} \left( 1 + \frac{\Lambda a}{\delta} \varepsilon_g^{1/2} \right) \left( \frac{\delta}{\Lambda a} \right)^{1/2} \varepsilon_g^{-1/4} \omega_M^{(0)}. \quad (5.34)$$

Відзначимо, що поправка до частоти, яка обумовлена періодичною (з  $n=2M$ ) змінною кривини металевої поверхні уздовж напрямку поширення хвилі з кутовим періодом  $(2\pi/M)$ , є пропорційною першому ступеню малого параметра  $(\Delta\omega_{b,M} \propto h_{2M})$ . Наявність у рівнянні металевої поверхні (5.25) малих доданків з  $n \neq 2M$  враховано в підрозділі 5.1, вона призводить до слабкішої ( $\propto h_n^2$ ) зміни частоти [156, 247], однакової для ПХ із протилежними знаками азимутального номера основної гармоніки, відповідні хвильові пакети мають вигляд хвилі, що біжить.

Графіки залежності поправки до частоти ПХ, нормованої на плазмову частоту  $(-\Delta\omega_{b,M}/\omega_{pe})$ , від ефективного хвильового числа  $k_{ef}$  зображено на рис. 5.6 і 5.7 лініями з короткими штрихами. Для наочності представленого графічного матеріалу малий параметр обраний у розрахунках рівним одиниці,  $h_{2M}=1$ .

Дослідимо тепер поперечні ПХ у некруглому циліндрі, тобто досліджуємо тепер випадок, коли ПХ поширюються в плазмовому циліндрі некруглого перерізу (5.24), що знаходиться в круглій металевій камері радіуса  $b$  без застосування сталого магнітного поля. Розщеплення частоти ПХ із кутовим періодом  $(2\pi/M)$  відбувається в цьому випадку, як і в попередньому, за наявності в правій частині рівняння межі поділу (5.24) малого доданка з  $n=2M$ .

Обмежений на осі циліндра (при  $r=0$ ) розв'язок рівняння (5.26), що описує розподіл поля  $H_z$  у плазмі (при  $r < R_I(\varphi)$ ), знаходимо в цьому випадку з урахуванням доданків першого порядку малості у вигляді

$$H_z = \{ [A_0^{(+)} \exp(iM\varphi) + A_0^{(-)} \exp(-iM\varphi)] I_M(\kappa_p r) + [A_1^{(+)} \exp(i3M\varphi) + A_1^{(-)} \exp(-i3M\varphi)] I_{3M}(\kappa_p r) \} \exp(-i\omega t), \quad (5.35)$$

де  $A_{0,1}^{(\pm)}$  – константи інтегрування.

Розв'язок рівняння (5.26), що описує розподіл поля  $H_z$  у діелектрику при заміні  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_g$  і задовольняє крайовій умові (5.27) на круглій металевій поверхні ( $r=b$ ), знаходимо з урахуванням доданків першого порядку малості у вигляді

$$H_z = \{ [F_0^{(+)} \exp(iM\varphi) + F_0^{(-)} \exp(-iM\varphi)] L_M(\kappa_g r) + [F_1^{(+)} \exp(i3M\varphi) + F_1^{(-)} \exp(-i3M\varphi)] L_{3M}(\kappa_g r) \} \exp(-i\omega t), \quad (5.36)$$

де  $F_{0,1}^{(\pm)}$  - константи, функція  $L_m(\kappa_g r)$  визначена формулою (5.27), у якій тепер

$$G_1 = N'_M(\kappa_g b), \quad G_2 = J'_M(\kappa_g b). \quad (5.37)$$

Умова неперервності сателітних гармонік полів  $H_z$  і  $E_r$  на межі  $r=R_l(\varphi)$  визначає амплітуди сателітних гармонік,

$$A_l^{(\pm)} = \frac{-\delta_{2M} A_0^{(\pm)}}{2D_{3M}^{(0)}} [I'_M(\kappa_p a) L'_{3M}(\kappa_g a) \left( \frac{\kappa_g}{\kappa_p} + \frac{\kappa_p}{\kappa_g} \right) a^2 + 3M^2 I_M(\kappa_p a) L_{3M}(\kappa_g a) \left( \frac{1}{\kappa_p^2} + \frac{1}{\kappa_g^2} \right)] \quad (5.38)$$

$$F_l^{(\pm)} = \frac{\delta_{2M} A_0^{(\pm)}}{2D_{3M}^{(0)}} [I'_M(\kappa_p a) I'_{3M}(\kappa_g a) \left( 1 + \frac{\kappa_g^2}{\kappa_p^2} \right) a^2 - 3M^2 I_M(\kappa_p a) I_{3M}(\kappa_g a) \left( \frac{1}{\kappa_p^2} + \frac{1}{\kappa_g^2} \right)] \quad (5.39)$$

Умови неперервності основних гармонік  $H_z$  і  $E_r$  на некруглій межі  $r=R_l(\varphi)$  визначають зв'язок між амплітудами основних гармонік у плазмі і діелектрику:

$$F_0^{(\pm)} = A_0^{(\pm)} \frac{I_m(\kappa_p a)}{L_M(\kappa_g a)}, \quad (5.40)$$

а також дозволяють одержати дисперсійне рівняння, що враховує неоднорідність кривини межі (5.24) поділу плазма – діелектрик, у вигляді секулярного рівняння (5.32). Поправка  $\Delta\omega_{a,M}$  до власної частоти ПХ, яка обумовлена відмінністю форми перерізу межі плазма - діелектрик від круглої, дорівнює

$$\Delta\omega_{a,M} = 0.5 \delta_{2M} [I_M(\kappa_p a) L_{3M}(\kappa_g a) \left( \frac{1}{\kappa_g^2} + \frac{1}{\kappa_p^2} \right) - a^2 I'_M(\kappa_p a) L'_M(\kappa_g a) \left( \frac{\kappa_g}{\kappa_p} + \frac{\kappa_p}{\kappa_g} \right)] \left( \frac{\partial D_M^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1}_{\omega=\omega_M^{(0)}}. \quad (5.41)$$

Вираз для поправки  $\Delta\omega_{a,M}$  спрощується у випадку малих ефективних хвильових

чисел ( $k_{ef} < 1$ ):

$$\Delta\omega_{a,M} \approx \frac{\delta_{2M}}{4} \sqrt{\frac{\delta}{\Lambda a}} \frac{M\Omega_e}{\sqrt[4]{\epsilon_g}}. \quad (5.42)$$

Для великих ефективних хвильових чисел ( $k_{ef} > 1$ ):

$$\Delta\omega_{a,M} \approx \frac{\delta_{2M}\Omega_e}{4} \sqrt{\frac{M}{\Lambda}}. \quad (5.43)$$

Якщо кутовий період неоднорідності є в два рази меншим за кутовий період основних гармонік ПХ, то ПХ існують у вигляді стоячих хвиль ( $A_0^{(-)} = \pm A_0^{(+)}$ ), якщо  $\omega = \omega_M^{(0)} \pm \Delta\omega_{a,M}$  із близькими частотами.

Графіки залежності нормованої на плазмову частоту поправки до частоти ПХ ( $\Delta\omega_{a,M}/\omega_{pe}$ ) від ефективного хвильового числа  $k_{ef}$  зображено на рис. 5.6 і 5.7 лініями з довгими штрихами. Для зручності порівняння з випадком некруглої межі поділу діелектрик - метал малий параметр обрано у розрахунках також рівним одиниці,  $\delta_{2M} = 1$ .

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі теоретично вивчено вплив відмінності форми меж поділу плазма - діелектрик (5.24) і діелектрик - метал (5.25) від круглого циліндра на дисперсійні властивості незвичайних електромагнітних хвиль поверхневого типу, що поширюються за азимуту в плазмових хвильоводах без магнітного поля. Досліджено розподіл полів поперечних ПХ в об'ємі хвильоводу (див. формули (5.30), (5.35) і (5.36)). Показано, що шляхом вибору форми поперечного переріза плазмового стовпа або металеві камери хвильоводу можна керувати спектральним складом ПХ, що поширюються в ньому.

Показано також, що періодична неоднорідність хвильоводу уздовж напрямку поширення ПХ призводить до розщеплення частоти ПХ, у якій кутовий період основних гармонік в два рази більший за період неоднорідності хвильоводу (див. формули (.22). (5.41) і рис. 5.6 і 5.7). У цьому випадку поперечна ПХ існує у вигляді двох стоячих хвиль із близькими частотами. Унаслідок додавання цих стоячих хвиль у хвильоводі виникають биття з частотою  $\Delta\omega_{a,b,M}$ . Кутовий період цих биттів визначається кутовим розміром неоднорідності товщини діелектричного шару. Вимірювання частоти биттів можна використовувати для діагностики па-

раметрів плазмового хвилеводу.

Числовий аналіз підтверджує, що поправка до частоти зростає зі зменшенням товщини діелектричного шару або діелектричної проникності діелектрика. За інших рівних умов поправка, яка обумовлена відмінністю форми межі поділу від круглої, є більшою, якщо це - межа плазма - діелектрик, ніж якщо це - межа діелектрик - метал. Це пояснюється тим, що енергія ПХ зосереджена саме поблизу межі плазма - діелектрик, і, отже, дисперсійні властивості ПХ більш чуттєві до неоднорідності саме цієї поверхні.

Якщо до досліджуваної структури прикласти аксіальне магнітне поле  $\vec{B}_0 || \vec{e}_z$ , відбудеться [90] зняття виродження спектрів АПХ щодо знака азимутального хвильового числа. Поправка до частоти, яка обумовлена малим аксіальним магнітним полем, дорівнює за порядком величини

$$\Delta\omega_B \sim \frac{-m\omega_{ce}}{2\sqrt{m^2 + a^2}\delta^{-2}}. \quad (5.44)$$

Впливом аксіального магнітного поля на дисперсійні властивості ПХ із кутовим періодом, що вдвічі перевищує кутовий період подовжньої неоднорідності, можна знехтувати, якщо електронна циклотронна частота  $|\omega_{ce}|$  є досить малою:

$$\frac{|\omega_{ce}|}{\omega_{pe}} \ll \frac{\delta_{2M}}{2} \sqrt{\frac{M}{A}} \left[ 1 + \sqrt{\frac{a}{M\delta}} \varepsilon_g^{-1/4} \left( 1 + \frac{a\Lambda}{\delta} \right) \right]. \quad (5.45)$$

Для об'ємних хвиль зняття виродження їхніх спектрів поперечним стаціонарним магнітним полем також є широко відомим. Наприклад, частоти електромагнітних коливань циліндричної плазми в аксіальному магнітному полі є виродженими щодо знака аксіального хвильового числа. На розщеплення власних частот швидких магнітозвукових хвиль стаціонарним поперечним магнітним полем уперше було звернуто увагу в [207], це явище докладно досліджено теоретично і спостерігається експериментально (див., наприклад, [189] і цитовану там літературу).

Стосовно актуальності та практичної значимості виконаних у даному підрозділі досліджень слід сказати таке. Як зазначено в [229], ПХ можуть бути відповідальними за небажане нагрівання периферійної плазми в термоядерних пастках, інтенсивну взаємодію частинок плазми зі стінкою камери, що, у свою чергу,



приводить до забруднення плазми домішковими іонами й ушкодженню камери. Дисперсійні властивості ПХ, що поширюються в токамаках уздовж малого азимута, доповідались в [227] з урахуванням багатьох особливостей цих уловлювачів: радіальної неоднорідності профілю густини плазми, D - подібності форми полоїдного перерізу камери, полоїдного магнітного поля, обумовленого подовжнім струмом у плазмі, і шафранівського зсуву магнітної осі внаслідок тороїдності пас-тки. Оскільки умова (5.45) добре виконується для токамаків, досліджене в цьому підрозділі розщеплення власної частоти може спостерігатися в таких уловлювачах для ПХ із полоїдним номером основної гармоніки  $M=1$ , де воно є обумовленим D - подібністю форми полоїдного перерізу металевої камери і плазми.

### 5.3. Розповсюдження електромагнітних хвиль вздовж межі плазми з металевим хвилеводом довільного перерізу в аксіальному магнітному полі

У підрозділі 5.3 методом послідовних наближень досліджено розповсюдження ПХ поперек зовнішнього магнітного поля вздовж межі металевих хвилеводу довільного перерізу, який заповнений холодною однорідною плазмою [146, 251]. Проведено порівняння властивостей поперечних ПХ із властивостями ПХ у плоскопаралельному плазмовому шарі та азимутальними ПХ у круглому циліндричному хвилеводі. Знайдено просторовий розподіл полів поперечних ПХ у такому хвилеводі у вигляді хвильового пакета з точністю до доданків другого порядку за малим параметром, який характеризує відміну форми перерізу хвилеводу від круглої. Числовими засобами проаналізована залежність величини цієї поправки від параметрів хвилеводу. Як приклад досліджені поперечні ПХ у майже квадратному хвилеводі, який заповнено напівпровідником  $n$ -типу.

Нехай густа ( $\omega_{pe} \gg |\omega_{ce}|$ ) однорідна холодна плазма повністю заповнює симетричний вздовж вісі  $z$  (у циліндричних координатах) металевий хвилевод ( $\partial/\partial z = 0$ ). Зовнішнє стале однорідне магнітне поле  $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$ . Форму внутрішньої поверхні металевої камери описує рівняння (5.1). Дослідимо  $E$ -хвилю з компонен-

тами поля  $E_r, E_\varphi, B_z$ . Розв'язок рівнянь Максвелла шукаємо у вигляді ряду Фур'є (5.4).

Задля спрощення розглянемо спочатку випадок, коли поверхня хвилеводу задається рівнянням

$$R_2 = R_1(1 + h_N \sin(N\varphi)), \quad (5.46)$$

де  $h_N \ll 1$ , а тоді узагальнимо результати, які здобудемо, на випадок хвилеводу довільного перерізу (5.1).

Компоненти електричного поля поперечних ПХ виражаються з рівнянь Максвелла через аксіальну складову магнітного поля хвилі  $H_z$  в наступний спосіб:

$$E_r = \frac{\omega}{c k_\perp^2} \left( \frac{1}{i r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right), \quad (5.47)$$

$$E_\varphi = \frac{i \omega}{c k_\perp^2} \left( \frac{\mu}{i r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial r} \right). \quad (5.48)$$

За нульове наближення використаємо теорію АПХ [120], які поширюються вздовж межі плазми з металевою камерою круглого перерізу. Основні відомості про їхні дисперсійні властивості наведено на початку розділу 4.

В першому наближенні за малим параметром  $h_N$  розв'язок рівнянь Максвелла шукаємо для аксіальної складової магнітного поля хвилі у наступному вигляді:

$$H_z(r, \varphi, t) = \left[ I_m(k_\perp r) + C_+^{(1)} I_{m+N}(k_\perp r) \exp(iN\varphi) + C_-^{(1)} I_{m-N}(k_\perp r) \exp(-iN\varphi) \right] \exp(i(m\varphi - \omega t)). \quad (5.49)$$

Крайова умова: рівність нулю тангенціального компонента електричного поля на некруглій металевій поверхні (5.1), - має вигляд (5.11).

Підстановка  $E_r$  та  $E_\varphi$  у вигляді (5.47) та (5.48), які виражені через  $H_z$  у вигляді (5.49), до крайової умови (5.11) показує, що урахування доданків першого порядку малості не змінює власної частоти ПХ, але визначає амплітуди гармонік - сателітів:

$$C_\pm^{(1)} = \frac{-h_N}{2D_{m \mp N}^{(0)}} I_m(k_\perp R_1) \left[ k_\perp^2 R_1^2 + m(m \pm N)(1 - \mu^2) \right] \Big|_{\omega^{(0)}}. \quad (5.50)$$

Таким чином, у хвилеводі некруглого перерізу ПХ розповсюджуються у ви-

гляді пакета гармонік з певними значеннями азимутальних номерів ( $m = M \pm jN$ , де  $j$  - цілі). В пакеті завжди присутні такі гармоніки - сателіти, які розповсюджуються в напрямку, зворотньому до напрямку розповсюдження основної гармоніки. Як вказує вигляд  $H_z$  (5.49), такий сателіт з'являється вже в першому наближенні за  $h_N$ , якщо  $|M| < N$ . Якщо  $|M| > N$ , то він з'являється в одному з наступних наближень. Частка енергії ПХ, яку переносять ці гармоніки, є величиною порядку  $h_N^{2k}$ , де  $k=1$ , якщо  $|M| < N$ ,  $k=2$ , якщо  $N \leq |M| < 2N$ , і т.д. Цим ПХ, які розглядаються, відрізняються від ПХ, які розповсюджуються в планарній геометрії, та від АПХ, для яких розповсюдження ПХ з різними поперечними хвильовими числами відбувається незалежним чином та які є односпрямованими.

Встановлено, що відмінність форми перерізу хвильоводу від кола у випадку малих розмірів (коли ефективне хвильове число  $k_{ef} = M\delta/R_l \gg 1$ ) призводить до зниження частоти  $\omega = \omega_M^{(0)} + \omega_{MN}^{(2)}$  ( $\omega_{MN}^{(2)} < 0$ ) ПХ порівняно до випадку круглого хвильоводу. Тобто неоднорідність поверхні вздовж напрямку розповсюдження ПХ служить сповільнюючою структурою. Якщо ж розміри хвильоводу великі ( $k_{ef} \ll 1$ ), то відміна форми перерізу від круглої знижує частоту ПХ лише з малими значеннями  $M < N$ . Якщо ж азимутальне хвильове число основної гармоніки  $M > N$ , то виникає інтервал значень ефективного хвильового числа  $(2M / (M^2 - N^2) < k_{ef} \ll 1)$ , для яких відмінність форми перерізу хвильоводу від кола призводить до підвищення частоти ( $\omega_{MN}^{(2)} > 0$ ) ПХ порівняно до випадку круглого хвильоводу ( $h_N = 0$ ). Числовий аналіз показав, що поправка  $\omega_{MN}^{(2)}$  з великою мірою точності є пропорційною до величини зовнішнього магнітного поля. Для хвильоводів великих розмірів ( $k_{ef} \rightarrow 0$ ) наш розгляд не можна використовувати, бо при цьому поправка до частоти  $\omega_{MN}^{(2)}$  стає більшою за саму частоту.

Виконані дослідження дають підставу дійти висновку, що поправка до власної частоти, яка зумовлена малою відмінністю форми перерізу металевого хвильоводу від кола (наявністю в правій частині рівняння поверхні (5.46) малого дода-

нка, пропорційного до  $\sin(N\varphi)$ , у другому наближенні за малим параметром  $h_N$  не залежить у випадку довільного перерізу (5.1) від наявності в правій частині рівняння поверхні (5.1) малих доданків з іншою кутовою залежністю. Тому з урахуванням доданків другого порядку малості за  $h_N$  у випадку хвилеводу з довільним перерізом (5.1) частоту ПХ можна знайти у наступному вигляді:

$$\omega = \omega_m^{(0)} + \sum_n \omega_{m\ n}^{(2)}, \quad (5.51)$$

де поправка до частоти, яка обумовлена малим відхиленням форми перерізу металевої поверхні (5.46) від кола, дорівнює

$$\omega_{M\ N}^{(2)} = -D_{M\ N}^{(2)} \left( \frac{\partial D_M^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\omega=\omega_M^{(0)}}, \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} D_{m\ n}^{(2)} = & \frac{h_n^2}{4} I_m(k_\perp R_l) (m^2 + 3k_\perp^2 R_l^2 - \mu^2 m^2) \\ & + \frac{h_n}{2} C_+^{(1)} \left[ I'_{m+n}(k_\perp R_l) k_\perp R_l (1 + \mu m) + I_{m+n}(k_\perp R_l) (k_\perp^2 R_l^2 + (m+n)(m+\mu)) \right] \\ & + \frac{h_n}{2} C_-^{(1)} \left[ I'_{m-n}(k_\perp R_l) k_\perp R_l (1 + \mu m) + I_{m-n}(k_\perp R_l) (k_\perp^2 R_l^2 + (m-n)(m+n)) \right] \Big|_{\omega=\omega_m^{(0)}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Важливим з практичної точки зору частинним випадком задачі, яка розглядається, є розповсюдження ПХ впоперек магнітного поля в майже квадратному хвилеводі. Хоча використання декартової системи координат в цьому випадку, по-перше, диктується міркуваннями симетрії та, по-друге, вже дозволяло розв'язати задачу у випадку напівнескінченної плазми [116] та плоского шару [117], тим не менш воно не допускає розділення змінних у випадку квадратного хвилеводу. Рівняння поверхні квадратного хвилеводу зі стороною  $a$  має вигляд

$$R_2 = R_l (1 + h_4 \cos(4\varphi) + h_8 \cos(8\varphi) + h_{12} \cos(12\varphi) + \dots), \quad (5.54)$$

де  $R_l = (a/\pi) \ln(3 + 2\sqrt{2})$ ,  $h_4 = -0.1394$ ,  $h_8 = 0.04395$ ,  $h_{12} = -0.02082$ . Оскільки при визначенні власної частоти ПХ у вигляді (5.51) було знехтувано доданками третього порядку малості, тому точність виразу (5.51) у випадку квадратного хвилеводу становить за порядком величини  $h_4^2 h_8 = 8.54 \times 10^{-4}$ .

Розглянемо, як конкретний приклад, квадратний хвильовод зі стороною  $a=1.8$  см, який заповнено напівпровідником  $n$ -Ge (концентрація електронів провідності  $n_e=2.5 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , ефективна маса електронів  $M_e=1.3 \times 10^{-27}$  г, діелектрична проникливість ґратки напівпровідника  $\varepsilon_0=16$ ) і поміщено в стале магнітне поле  $B_0=100$  Ое. У фізиці напівпровідників ПХ, які досліджуються, зветься поверхневими магнітоплазмовими поляритонами, а геометрія хвильоводу, яка розглядається, - геометрією Фойгта. Найнижчу власну частоту має НЧ ПХ, основна гармоніка якої характеризується азимутальним номером  $m=1$ . Ця частота дорівнює  $\omega = \omega_1^{(0)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(2)} + \dots = 2.51 \times 10^9 - 1.89 \times 10^8 - 6.24 \times 10^7 - 2.73 \times 10^7 = 2.23 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Глибина проникнення поля цієї ПХ до плазми  $n$ -Ge  $k_{\perp}^{-1}=0.134$  см є малою порівняно до розмірів хвильоводу. Термін життя вільних електронів  $\tau=10^{-5}$  с в плазмі  $n$ -Ge є великим порівняно до періоду ПХ, що виправдовує використання нами моделі плазми без зіткнень.

Наведений приклад показує, що для практичних розрахунків частоти ПХ в квадратному хвильоводі досить врахувати, окрім основного доданка  $\omega_m^{(0)}$ , лише першу поправку  $\omega_m^{(2)}$ , оскільки доданки  $\sum_{j=2}^{\infty} \omega_m^{(2)} j$ , якими при цьому нехтуємо, становлять лише близько 4%. Таке становище, однак, не носить універсального характеру. Воно, наприклад, не має місця в хвильоводі з поперечним перерізом у вигляді прямокутника зі сторонами  $d$  та  $b$ , такими що  $|b-d| \ll b$ . Тому для оцінки величини доданків, які відкинуто, слід визначити асимптотику  $\omega_{mn}^{(2)}$  (5.52) для великих значень  $n$  ( $n \gg k_{\perp} R_l \gg |m|$ ). У випадку НЧ ПХ

$$\omega_{mn}^{(2)} = -0,5 h_n^2 k_{\perp} R_l n \omega_m^{(0)}, \quad (5.55)$$

та у випадку ВЧ ПХ

$$\omega_{mn}^{(2)} = -0,5 h_n^2 k_{\perp} R_l n \omega_{ce}^2 / \omega_m^{(0)}. \quad (5.56)$$

Вирази (5.55) та (5.56) показують, що ряд (5.51) збігається, якщо  $h_n$  зменшується із зростанням  $n$  швидше, ніж  $n^{-1}$ .

В цьому підрозділі ми показали, що частота ПХ в квадратному хвилеводі зі стороною  $a$  є близькою до частоти АПХ, яка розповсюджується в круглому циліндрі радіусу  $R_l = (a/\pi) \ln(3 + 2\sqrt{2})$ . Для визначення цієї частоти в нульовому наближенні можна скористатись асимптотичними формулами (4.141) і (4.145) у випадку НЧ ПХ та формулою (4.143) для ВЧ ПХ. Для розглянутого вище прикладу формула (4.141) дає значення частоти НЧ ПХ  $\omega_l^{(0)} = 2.477 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$ , яке менше, ніж на 2%, відрізняється від розрахункового значення. А приблизне значення поправки дорівнює згідно (5.54)  $\omega_l^{(2)} = -3.7 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$  та лише за порядком величини співпадає з розрахунковим значенням. Така помітна розбіжність пояснюється тим, що в цьому випадку  $k_{\perp} R_l = 7.5$ , та нерівність  $k_{\perp} R_l \gg N$ , яка вважалась справедливою при отриманні (5.54), виконується погано.

Відзначимо ще дві відмінності властивостей ПХ, які розповсюджуються в квадратному хвилеводі, від властивостей ПХ у плазмовому шарі [117]. По - перше, величина частоти ПХ в однорідному плазмовому шарі не залежить від розмірів хвилеводу, а частота поперечних ПХ в квадратному хвилеводі явно залежить від розмірів хвилеводу. Це пояснюється тим, що частота ПХ в шарі залежить від величини хвильового вектора вздовж напрямку розповсюдження. У випадку шару, який є безкінечним вздовж напрямку розповсюдження хвилі, цей хвильовий вектор може мати довільну величину, а у випадку ПХ у квадратному хвилеводі роль хвильового вектора для основної гармоніки відіграє частка  $(m/R_l)$ . По - друге, розповсюдження ПХ вздовж протилежних поверхонь однорідного шару відбувається незалежно, а фази ПХ на протилежних гранях квадратного хвилеводу жорстко пов'язані (різниця фаз для основної гармоніки становить  $M\pi$ ). Звідси приходимо до висновку, що урахування скінченності довжини однорідного шару, можливо, призводить до появи зв'язку між ПХ, які розповсюджуються вздовж його протилежних поверхонь.

На рис. 5.8 – 5.10 показано розподіл полів  $H_z$  (рис. 5.8),  $E_r$  (рис. 5.9) та  $E_{\varphi}$  (рис. 5.10) ПХ, основна гармоніка якої характеризується азимутальним номером  $m = 1$ , в плазмі  $n - Ge$ , який розрахований за формулою (5.4), в якій враховані ма-

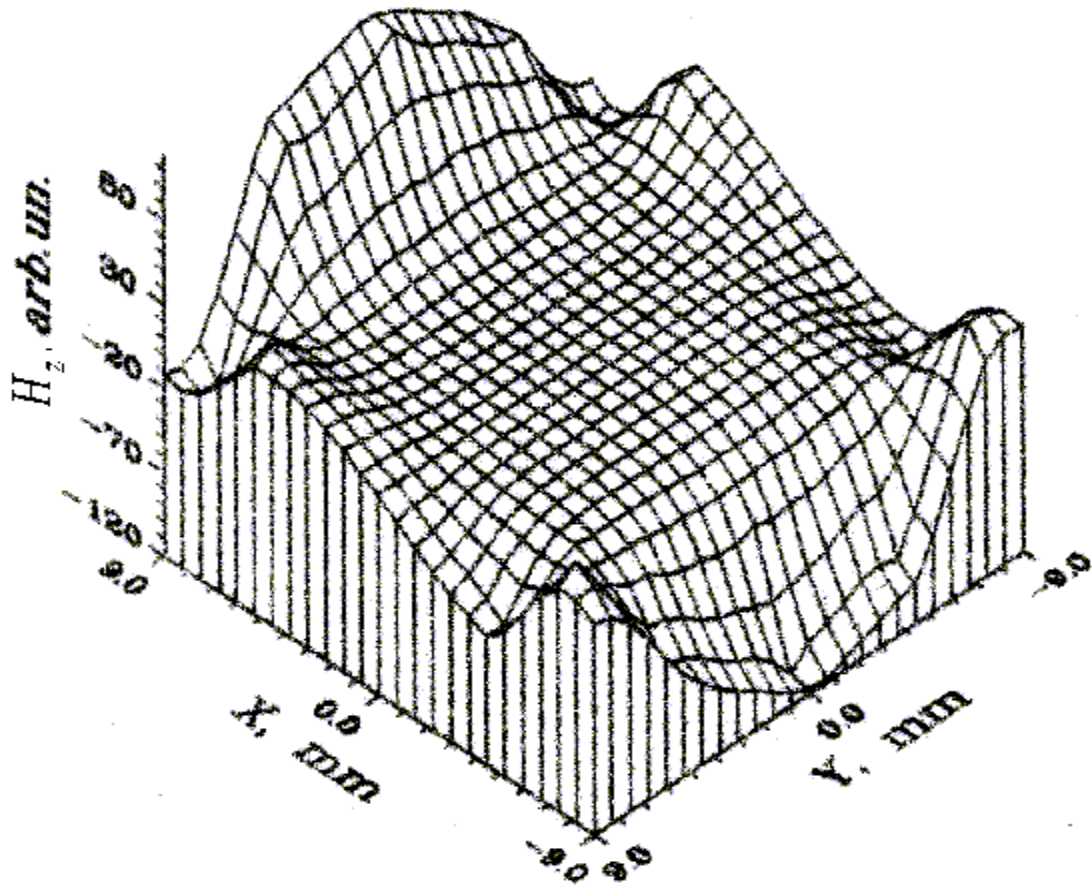


Рис. 5.8 Розподіл поля  $H_z$  в перерізі квадратного хвильоводу.

лі сателіти  $\propto \exp(i(m \pm 4)\varphi)$  та  $\propto \exp(i(m \pm 8)\varphi)$ . Величини полів вказані у відносних одиницях. По рисунках видно, що максимальну амплітуду має магнітне поле. Це говорить про те, що ПХ, які розглядаються, є істотно непотенціальними. Числовий аналіз показав, що амплітуда сателіта  $\propto \exp(i(M + N)\varphi)$  є більшою за амплітуду сателіта  $\propto \exp(i(M - N)\varphi)$ , якщо  $M < N$ , та навпаки, якщо  $M > N$ .

Вкажемо ще на одну можливість застосування результатів, які тут отримано. Теорію АПХ, яку тут використано за нульове наближення, розроблено в [120] також і для хвиль, які розповсюджуються поблизу поверхні круглого металевого стрижня, якого орієнтовано вздовж зовнішнього магнітного поля, і якого поміщено в однорідну плазму. В такій геометрії АПХ існують в тих самих частотних діапазонах (4.4) і (4.5). Їхня частота характеризується якісно тією самою залежністю

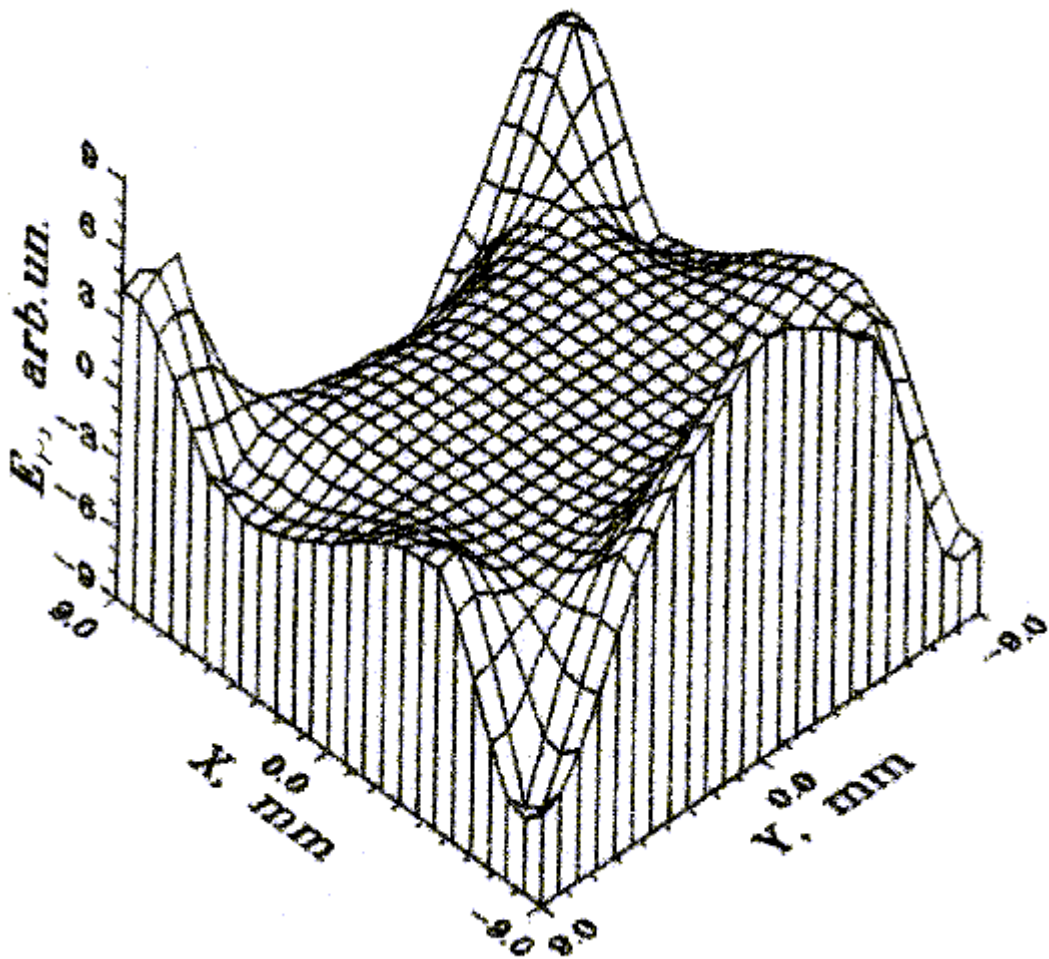


Рис. 5.9 Розподіл поля  $E_r$  в перерізі квадратного хвильоводу.

від параметрів плазми, що і частота АПХ в круглому циліндрі (див. рис. 5.8). Слід відзначити дві основні відмінності властивостей АПХ поблизу поверхні круглого стрижня від властивостей АПХ у циліндричному хвильоводі. По - перше, вони розповсюджуються лише з від'ємними азимутальними номерами в НЧ діапазоні частот (4.4), а у ВЧ діапазоні (4.5) – лише з додатними номерами. По - друге, розподіл поля  $H_z$  поблизу стрижня описується формулою (5.49), а власна частота ПХ визначається як розв'язок дисперсійного рівняння при заміні в них модифікованих функцій Бесселя функціями Макдональда того самого порядку та аргументу. З урахуванням цих двох зауважень розгляд, який проведено, є справедливим і для ПХ, які розповсюджуються поблизу поверхні некруглого (наприклад, квадратного) металевого стрижня, якого орієнтовано уздовж зовнішнього магнітного поля



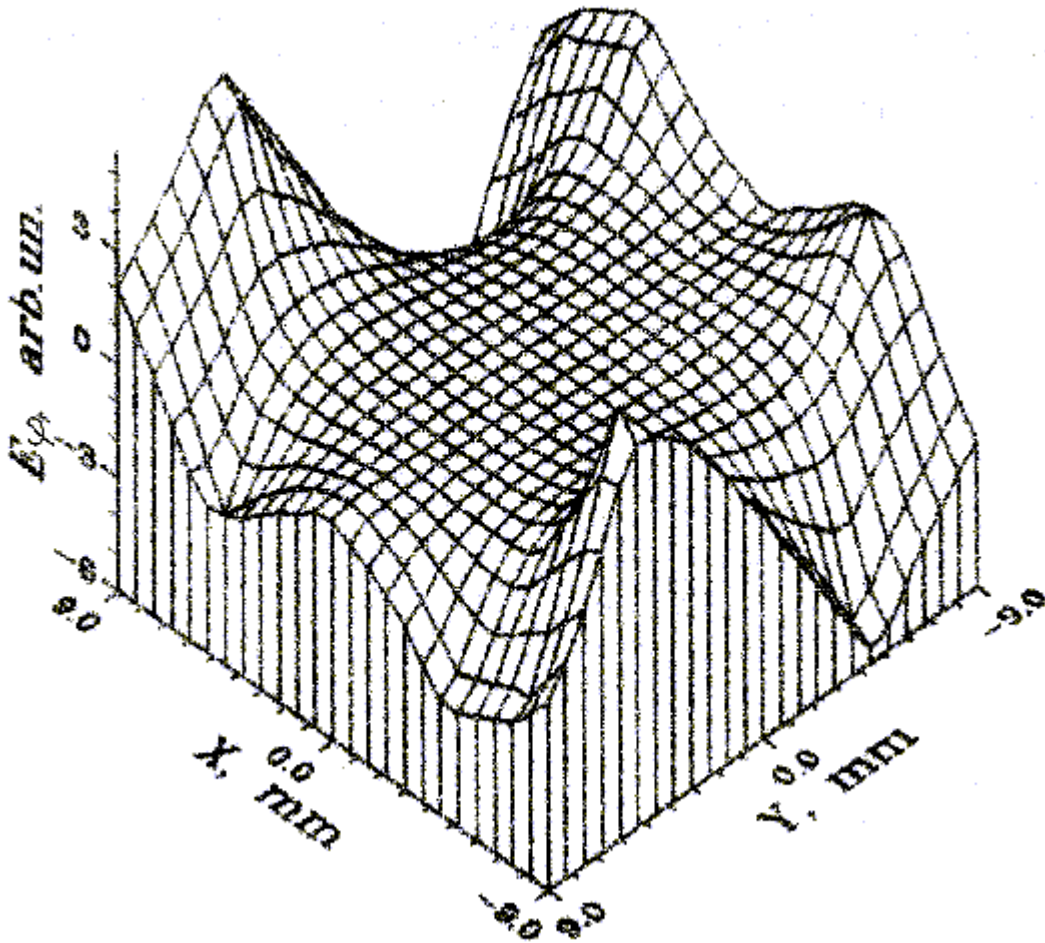


Рис. 5.10 Розподіл поля  $E_\varphi$  в перерізі квадратного хвильоводу.

та поміщено до однорідної плазми великих (порівняно до глибини проникнення поля ПХ) розмірів.

Підіб'ємо підсумки. В цьому підрозділі методом послідовних наближень досліджено розповсюдження ПХ впоперек зовнішнього магнітного поля вздовж межі металевого хвильоводу довільного перерізу (5.1), який заповнено холодною однорідною плазмою. Відхилення форми поперечного перерізу хвильоводу від круглої вважалось малим. Проведено порівняння властивостей цих ПХ із властивостями ПХ у плоскопаралельному плазмовому шарі та АПХ в круглому циліндричному хвильоводі. Показано, що ПХ, які розглянуто, розповсюджуються в тому самому частотному діапазоні, що й АПХ [120]. Просторовий розподіл (5.49) і (5.50) полів ПХ в такому хвильоводі знайдено з точністю до доданків першого по-

ряду малості. Числовими засобами проаналізовано залежність величини цієї поправки від параметрів хвильоводу (див. рис. 5.8). Як приклад досліджено поперечні ПХ в квадратному хвильоводі, який заповнено напівпровідником  $n$ -типу. Показано, що властивості таких ПХ є близькими до властивостей АПХ, які розповсюджуються в циліндрі радіусом  $R_l = (a/\pi) \ln(3 + 2\sqrt{2})$  ( $a$  - бік квадрату). Здобуті результати узагальнено на випадок поперечних ПХ, що поширюються вздовж поверхні металевих стрижня довільного перерізу, який занурено у холодну плазму паралельно до зовнішнього магнітного поля.

Точний аналітичний розв'язок задачі про поширення поперечних ПХ вздовж межі плазми з металевим хвильоводом еліптичного перерізу, одержаний згодом в [252], підтвердив правильність здобутих в цьому підрозділі результатів для випадку хвильоводу еліптичного перерізу.

#### 5.4. Поширення поверхневих хвиль поперек осі магнітоактивного плазмового хвильоводу з діелектричним покриттям металевих стінок

Дослідимо у цьому підрозділі дисперсійні властивості поперечних ПХ, які поширюються в металевому хвильоводі некруглого перерізу з круглою однорідною плазмовою вставкою в аксіальному сталому магнітному полі [157]. Це дослідження узагальнює результати досліджень, які виконано у підрозділі 5.1 на випадок наявності зовнішнього аксіального магнітного поля.

Шукаємо залежність полів електромагнітної ПХ від кутової координати і часу у вигляді  $\vec{E}, \vec{H} \propto \exp(im\varphi - i\omega t)$ , де  $m$  - азимутальне хвильове число,  $\varphi$  - азимутальний кут,  $\omega$  - частота хвилі. Розглядаємо металевий хвильовод, радіус якого  $R_2$  змінюється уздовж азимутального кута  $\varphi$  за законом (5.1). У середині металевих хвильоводу коаксіально розташовано плазмовий циліндр радіуса  $R_0$ , для якого виконується нерівність  $h_n < (R_l - R_0)/R_0 < 1$  (див. рис. 5.1). Хвильовод вважаємо однорідним уздовж осі циліндра. Область  $R_0 < r < R_2$  займає діелектрик із проникливістю  $\varepsilon_d \geq 1$ . Зовнішнє стале магнітне поле  $\vec{B}_0$  спрямовано уздовж осі хвильоводу. Для

опису полів ПХ скористаємося рівняннями Максвелла. Вектори електричної індукції і напруженості електричного поля вважаємо зв'язаними тензором діелектричної проникливості холодної магнітоактивної плазми зі слабкими зіткненнями (див., наприклад, [115]). Два його компоненти  $\varepsilon_{11}$  і  $\varepsilon_{12}$ , які будуть використані в цьому підрозділі, наведено у формулах (4.126) і (4.127).

При обраній залежності полів ПХ система рівнянь Максвелла розпадається на дві незалежні підсистеми, що описують  $E$  - і  $H$  - хвилі. Обмежимося випадком  $E$  - хвилі, що поширюється уздовж межі однорідного плазмового циліндра, густину плазми при цьому вважаємо досить великою, щоб виконувалася нерівність  $\Omega_\alpha^2 > \varepsilon_0 \omega_\alpha^2$ . Останнє припущення гарно виконується для випадку напівпровідникової плазми.

Розв'язуючи рівняння Максвелла для ПХ  $E$  - типу в області  $r \leq R_0$ , яку зайнято плазмою, знаходимо вирази для компонентів поля ПХ у хвильовдній структурі, що розглядається, у вигляді рядів Фур'є,  $H_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_z^{(m)} \exp(im\varphi - i\omega t)$ . При  $r \leq R_0$ :

$$H_z^{(m)} = C_l^{(m)} I_m(k_\perp r), \quad (5.57)$$

компоненти  $E_r$  і  $E_\varphi$  електричного поля поперечних ПХ виражаються з рівнянь Максвелла через аксіальну складову магнітного поля хвилі  $H_z$  формулами (5.47) і (5.48).

В області  $R_0 < r < R_2$ , яку зайнято діелектриком, аксіальна складова магнітного поля хвилі записується через функцію Бесселя першого роду і функцію Неймана за допомогою формули (5.7), а компоненти  $E_r$  і  $E_\varphi$  електричного поля поперечних ПХ виражаються через  $H_z$  формулами (5.5) і (5.6).

З метою спрощення викладу матеріалу розглянемо докладно випадок, коли відмінність форми внутрішньої поверхні металевої камери від кола описується однією Фур'є гармонікою,  $R_2 = R_1(1 + h_N \sin(N\varphi))$ , а потім узагальнимо отримані результати на випадок хвильоводу з довільною формою (5.1) поперечного перерізу. Крім того, розв'язання такої спрощеної задачі має важливе практичне застосування. Так, випадок  $N=1$  відповідає порушенню коаксіальності хвильоводної структури: розбіжності осей плазмового циліндра і металевого хвильоводу. Випадок  $N=2$

описує хвилевід еліптичної форми, уповільнюючій структурі з кутовим періодом  $2\pi/N$  відповідають значення  $N \geq 3$ .

Щоб одержати дисперсійне рівняння, слід скористатися наступними крайовими умовами: - обмеженість поля хвилі на осі (5.8), - неперервність тангенціальної складової електричного поля хвилі (5.9), - неперервність тангенціальної складової магнітного поля хвилі (5.10), - рівність нулю тангенціальної складової електричного поля на межі з металом (5.11).

Одержимо дисперсійне рівняння ПХ, що поширюються поперек осі металевого хвилеводу некруглого перерізу з плазмовою вставкою. Дослідження виконаємо методом послідовних наближень. За нульове наближення використаємо теорію АПХ [90], які поширюються в металевому магнітоактивному хвилеводі круглого перерізу.

У нульовому наближенні ( $h_N=0$ ) АПХ із різними азимутальними номерами мод поширюються незалежно. Магнітне поле АПХ у діелектричній області можна записати у нульовому наближенні у вигляді однієї гармоніки (5.12) – (5.13), при цьому величини  $G_{1,2}$  набувають наступного вигляду:

$$G_1^{(m)} = I_m(k_{\perp} R_0) \{ N'_m(\kappa_g R_0) + A^{(m)} N_m(\kappa_g R_0) \}, \quad (5.58)$$

$$G_2^{(m)} = I_m(k_{\perp} R_0) \{ J'_m(\kappa_g R_0) + A^{(m)} J_m(\kappa_g R_0) \}, \quad (5.59)$$

де

$$A^{(m)} = \left\{ \frac{m\varepsilon_2}{\varepsilon_1 k_{\perp} R_0} + \frac{I'_m(k_{\perp} R_0)}{I_m(k_{\perp} R_0)} \right\} \frac{k \sqrt{\varepsilon_d}}{k_{\perp}}, \quad (5.60)$$

знак "штрих" означає похідну за аргументом. Компоненти електричного поля ПХ одержимо, підставивши  $H_z$  у вигляді (5.12) – (5.15) до визначення (5.5) і (5.6). Крайову умову (5.11) на  $E_{\tau}$  в нульовому наближенні слід записати у вигляді  $E_{\varphi}(R_1)=0$ . При цьому одержуємо дисперсійне рівняння, що збігається з дисперсійним рівнянням для АПХ у випадку круглого хвилеводу [90].

У першому наближенні за параметром гофрування  $h_N$  магнітне поле ПХ у діелектричній області слід записати у вигляді суми (5.17).

З розв'язання дисперсійного рівняння, записаного з точністю до доданків,

пропорційних квадрату  $h_N$ , частоту поперечних ПХ можна знайти у вигляді суми  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega_N$ , де  $\omega_0$  - частота ПХ за відсутності гофрування ( $h_N = 0$ ),  $\Delta\omega_N$  - поправка до частоти, яка обумовлена відмінністю форми перерізу металевих хвильоводів від кола. Використовуючи рекурентні співвідношення для циліндричних функцій, а також вважаючи діелектричний шар тонким,  $\Lambda = (R_1 - R_0)/R_1 \ll 1$ , можна записати поправку до частоти у вигляді (5.19). З виразу (5.19) (особливо – з порівняння виразів (5.58) – (5.60) для величин  $G_{l,2}$  у випадку плазми в магнітному полі і аналогічних виразів (5.14) і (5.15) у випадку плазми без сталого магнітного поля) видно, що величина поправки до частоти залежить від знака азимутального хвильового числа, у той час як для ізотропних хвильоводів спектри ПХ є виродженими відносно знака  $m$ . Питання зняття такого виродження, обумовленого відмінністю форми перерізу хвильоводу від кола, розглянуті в роботах [150, 247].

У деяких граничних випадках аналітично можна одержати наочні вирази для  $\Delta\omega_N$ . У широкому ( $k_\perp R_0, \kappa_g R_0 \gg |m|$ ) хвильоводі поправка має вигляд:

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_0} = -\frac{h_N^2}{16} \cdot \left\{ 1 - \frac{k_\perp^2 R_0^2}{k_\perp R_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(m+N)} - \frac{k_\perp^2 R_0^2}{k_\perp R_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(m-N)} \right\} \quad (5.61).$$

У випадку вузького хвильоводу ( $k_\perp R_0, \kappa_g R_0 \ll 1$ ) одержуємо наступну формулу для поправки:

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_0} = \frac{h_N^2}{16} \left\{ 1 - \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)m^3}{\varepsilon_d(m^2 - N^2)} \right\}. \quad (5.62)$$

Належить звернути особливу увагу на значення величини  $\Lambda$ , що характеризує середнє значення товщини діелектричного прошарку. При прагненні до нуля величини зовнішнього магнітного поля виразом (5.61) користуватися не можна, оскільки в ізотропному хвильоводі при  $\Lambda = 0$  такі ПХ не існують, а при  $\Lambda \neq 0$  їхній спектр є виродженим. Розглянемо, як змінився спектр ПХ у присутності магнітного поля. При збільшенні величини зовнішнього магнітного поля власна частота ПХ у металевому хвильоводі некруглого перерізу зменшується.

У випадку хвильоводу з довільною формою перерізу (5.1) власну частоту ПХ

можна записати в наступному вигляді:

$$\omega = \omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega_n, \quad (5.63)$$

де поправка  $\Delta\omega_n$  визначається формулою (5.19).

Більш повну інформацію про залежність поправки  $\Delta\omega_N$  до частоти ПХ від параметрів хвильоводної структури можна одержати внаслідок числового розв'язання дисперсійного рівняння (5.19). Величину поправки до власної частоти ПХ, яку нормовано на електронну ленгмюрівську частоту,  $(\Delta\omega_N/\omega_{pe})$ , як функцію ефективного хвильового числа представлено на рис. 5.11. Номерами на рисунку позначено кількість гофрів металевого хвильоводу. Зі зменшенням радіусу металевого хвильоводу і збільшенням кількості його гофрів величина поправки до власної частоти збільшується, що призводить до зменшення власної частоти. Числовий аналіз показує, що поправка зростає при зменшенні товщини діелектричного ша-

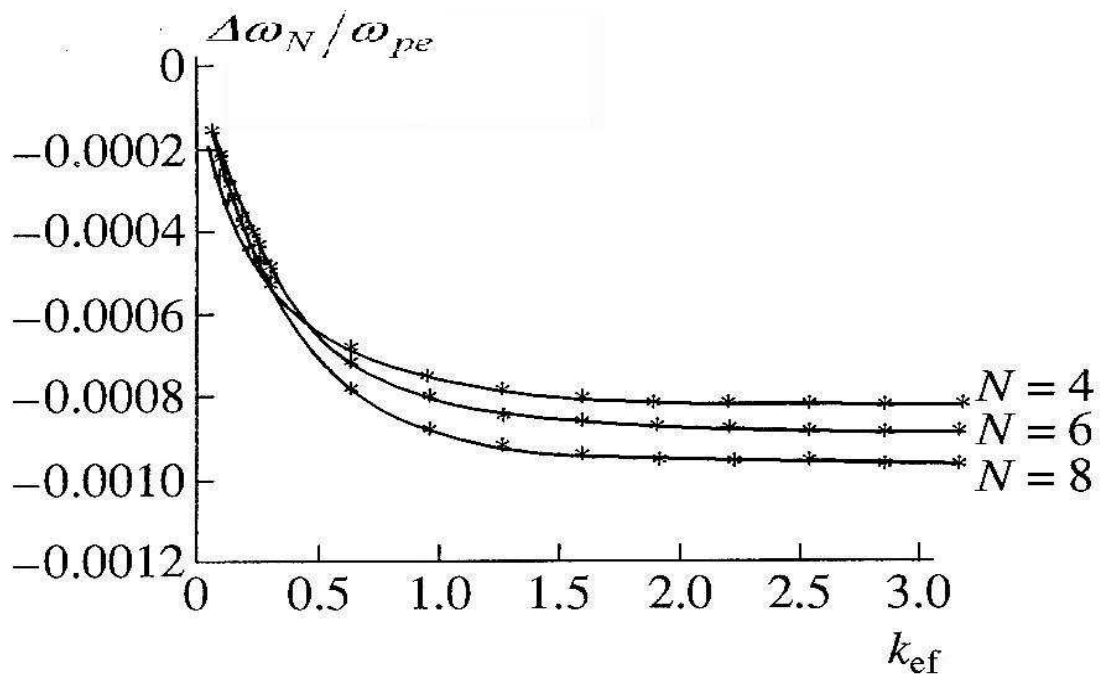


Рис. 5.11 Поправка до частоти поперечної ПХ, яку обумовлено відмінністю форми перерізу металевого хвильоводу від кола, нормована на електронну ленгмюрівську частоту, як функція ефективного хвильового числа. Криві стосуються різної кількості періодів неоднорідності металеві камери. Обрано такі параметри хвильоводу:  $\omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2=1000$ ,  $\varepsilon_d=1$ ,  $m=2$ ,  $\omega_0/\omega_{pe}=0.192$ ,  $\Delta=0.1$ ,  $h=0.001$ .

ру чи при зменшенні діелектричної проникливості діелектрика.

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі досліджено дисперсійні властивості ХПТ при їхньому поширенні у хвилеводі довільного перерізу поперек зовнішнього аксіального магнітного поля, в якому круглий плазмований циліндр відокремлено від металевої камери діелектричним шаром. Це дослідження узагальнює результати, які здобуто у підрозділі 5.1 для випадку хвилеводу без магнітного поля, і результати, які здобуто у підрозділі 5.3 для випадку хвилеводу без діелектричного покриття металевих стінок. Аналітично і числовими методами проаналізовано залежність поправки до частоти, яку обумовлено періодичною вздовж азимута кривиною поверхні металевої камери, від параметрів хвилеводу і хвилі.

Аналізуючи можливість застосування результатів, які здобуто в цьому підрозділі, для пояснення експериментів із нагрівання плазми в токамаках, слід мати на увазі, що в деяких експериментальних роботах [72, 245] саме поверхневі моди визнаються причиною небажаного нагрівання периферії плазмового шнура і його забруднення домішковими іонами, що з'являються через активну взаємодію частинок плазми, захоплених ПХ, зі стінками реактора й екранами, що прикривають антени. *D*- подібну форму перерізу токамака при цьому можна приблизно описати, поклавши  $n=2$  в (5.1). Дисперсійні властивості ПХ, що поширюються в токамаках уздовж малого азимута, досліджено в [227] з урахуванням багатьох особливостей цих пасток: радіальної неоднорідності профілю густини плазми, *D* - подібності форми полоїдного перерізу камери, полоїдного сталого магнітного поля, обумовленого подовжнім струмом у плазмі, і Шафранівського зсуву магнітної осі внаслідок тороїдності пастки. Досліджена в цьому підрозділі зміна власної частоти може бути обумовлена в токамаках *D* - подібністю форми полоїдного перерізу металевої камери і плазми. Цьому дослідженню властивостей ПХ представляються цікавими і для вибору оптимальних режимів введення ВЧ енергії до плазми токамаків.

### 5.5. Поперечні поверхневі магнітоплазмові хвилі в металевому хвилеводі прямокутного перерізу, який заповнено $n$ - напівпровідником

У вакуумній електроніці широко застосовуються хвилеводи прямокутного перерізу. Напівпровідникові зразки саме такого перерізу використовувалися в експериментах, у яких уперше досліджувалися ПХ на межі плазма - метал [121]. У цьому підрозділі у рамках методу послідовних наближень досліджено дисперсійні властивості поверхневих електромагнітних хвиль, що поширюються в напрямку, перпендикулярному зовнішньому магнітному полю в металевих хвилеводах майже прямокутного перерізу з  $n$  - напівпровідниковим заповненням [148].

Нехай напівпровідник  $n$  - типу з концентрацією  $n_e$  вільних електронів, ефективною масою електронів  $M$ , діелектричною проникністю ґратки  $\varepsilon_0$  повністю заповнює симетричний уздовж осі  $Z$  ( $\partial/\partial z=0$  у циліндричних координатах) металевий хвилевід майже прямокутного перерізу зі сторонами  $a$  і  $b$ . Зовнішнє магнітне поле спрямовано уздовж осі хвилеводу, тобто  $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$ . Досліджуємо поширення  $E$  - хвилі з компонентами поля  $E_r, E_\phi, H_z$  ( $H$  - хвиля поверхневого типу з компонентами поля  $E_z, H_r, H_\phi$  у хвилеводах зазначеної геометрії не поширюється [120]). У фізиці напівпровідників розглянуті ПХ називаються поверхневими магнітоплазмовими поляритами, а розглянута геометрія хвилеводу – геометрією Фойгта.

Рівняння для прямокутної утворюючої у циліндричній системі координат має вигляд

$$R_2 = R(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{2n} \cos(2n\varphi)), \quad (5.64)$$

де

$$R(d=0) = \frac{a}{2\pi} \ln \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0} + \frac{b}{2\pi} \ln \frac{1 + \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0}, \quad \text{tg } \varphi_0 = b/a, \quad (5.65)$$



$$\delta_{2n} = [a / (\pi R)] \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos (2n\varphi) / [\cos (\varphi)] d\varphi \quad (5.66)$$

$$+ [b / (\pi R)] \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \cos (2n\varphi) / [\sin (\varphi)] d\varphi.$$

Якщо коефіцієнти  $\delta_j$ , що входять до (5.64), є малими ( $|\delta_j| \ll 1$ ), то форма перерізу хвилеводу мало відрізняється від кола. У цьому випадку можна застосувати для дослідження дисперсійних властивостей ПХ метод послідовних наближень. При цьому малими параметрами служать величини  $\delta_j$ , а властивості досліджуваних ПХ близькі (збігаються в нульовому наближенні) до властивостей АПХ, що поширюються в циліндричному хвилеводі з ефективним радіусом  $R$ , визначеним формулою (5.65).

Перші коефіцієнти  $\delta_j$  мають простий аналітичний вид. Наприклад, при  $n = 1$

$$\delta_2 = [a / (\pi R)] [4 \sin \varphi_0 - \ln[(1 + \sin \varphi_0) / (1 - \sin \varphi_0)]] +$$

$$+ [b / (\pi R)] \ln[(1 + \cos \varphi_0) / (1 - \cos \varphi_0)] - 4 \cos \varphi_0, \quad (5.67)$$

а при  $n = 2$

$$\delta_4 = 2 - [16 / (3\pi R)] (a \sin^3(\varphi_0) + b \cos^3(\varphi_0)). \quad (5.68)$$

Якщо форма перерізу хвилеводу слабо відрізняється від квадрата ( $\lambda = (b - a) \ll a$ ), то коефіцієнти  $\delta_j \ll 1$  (у випадку  $b = a$  коефіцієнти  $\delta_{2n} \equiv 0$  для непарних  $n$  відповідно до симетрії хвилеводу). При цьому вирази для ефективного радіуса (5.65) і коефіцієнтів  $\delta_j$  (5.67) і (5.68) ще більш спрощуються. З урахуванням тільки перших малих поправок за параметром  $\lambda$  маємо

$$R \approx [(2a + \lambda) / (2\pi)] \ln(3 + 2\sqrt{2}) = 0.561 (a + 0.5\lambda), \quad (5.69)$$

$$\delta_2 \approx [\lambda / (\pi R)] [\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}] = -0.605 \lambda / a, \quad (5.70)$$

$$\delta_4 \approx 2 - \sqrt{2} \ln^{-1}(3 + 2\sqrt{2}) \{ (8/3) - [(3\lambda^2) / (4a^2)] \} = -0.139 + 0.602 \lambda^2 / a^2. \quad (5.71)$$

Саме малість коефіцієнта  $\delta_4$  при  $\lambda = 0$  дозволила в [253] скористатися методом послідовних наближень для дослідження дисперсійних властивостей ПХ у квад-

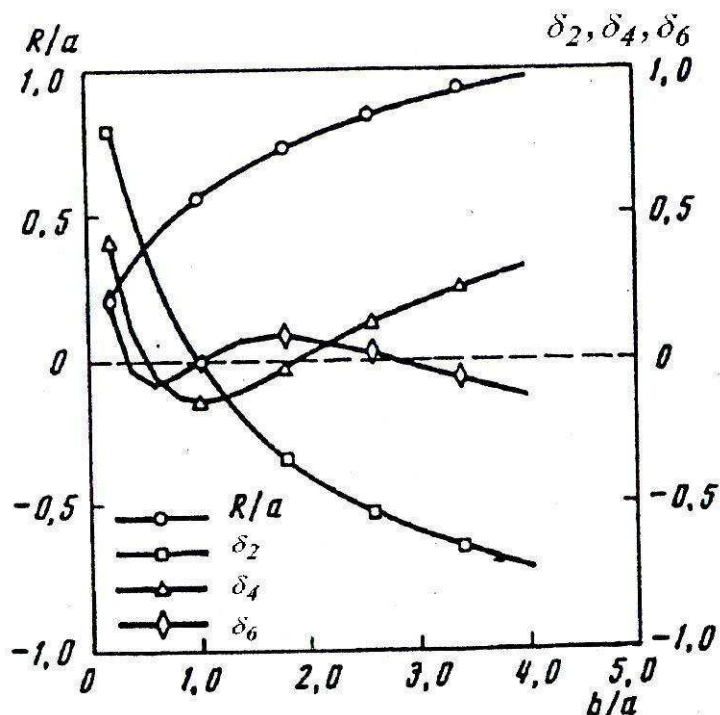


Рис. 5.12 Залежність коефіцієнтів, які входять до рівняння (5.64) утворюючої прямокутника, від частки  $b/a$ , яка характеризує видовження прямокутника (його відмінність від квадрата).

ратному хвилеводі.

На рис. 5.12 зображено залежність ефективного радіуса  $R$ , нормованого на  $a$ , а також коефіцієнтів  $\delta_2$ ,  $\delta_4$  і  $\delta_6$  від співвідношення сторін прямокутника  $b/a$ . Величина коефіцієнтів  $\delta_j$  відповідно до визначення (5.66) не залежить від абсолютного значення  $a$  і  $b$ , а тільки від їхньої частки ( $b/a$ ). З рис. 5.12 видно, що для прямокутника зі сторонами  $b \gg a$  чи  $a \gg b$  коефіцієнти  $\delta_j$  є досить великими. Тому використовуваний тут метод послідовних наближень для таких хвилеводів є незастосовним. (Властивості ПХ у таких хвилеводах, очевидно, є близькими до властивостей ПХ у плазмовому шарі [117].) При  $0.4 < b/a < 2.5$  коефіцієнти  $\delta_j$  є досить малими, і, отже, можна скористатися методом послідовних наближень для розв'язання нашої задачі. Дисперсійне рівняння можна одержати з умови (5.11) рівності нулю тангенціального компонента електричного поля хвилі на металевій

поверхні (5.64).

Оскільки в круглому хвилеводі просторові гармоніки АПХ із різними азимутальними номерами  $m$  поширюються незалежно, вважаємо відмінною від нуля в нульовому наближенні ( $\delta_j = 0$ ) амплітуду тільки  $m$ -ї гармоніки. Відповідно до цього розв'язок рівнянь Максвелла для аксіального компонента магнітного поля поперечних ПХ шукаємо у вигляді

$$H_z = [I_m(k_{\perp}r) + \sum_{j=1}^n [C_+^{(2j)} I_{m+2j}(k_{\perp}r) \exp(i2j\varphi) + C_-^{(2j)} I_{m-2j}(k_{\perp}r) \exp(-i2j\varphi)]] \exp[i(m\varphi - \omega t)]. \quad (5.72)$$

Зовнішнє магнітне поле вважаємо слабким, так що  $\omega_{pe}^2 > \epsilon_0 \omega_{ce}^2$ . Амплітуди сателітних гармонік (доданки, що розміщені під знаком суми в (5.72)) вважаємо малими в порівнянні з амплітудою основної гармоніки ( $I_m(k_{\perp}r)$ ).

Компоненти електричного поля поперечних ПХ виражаються з рівнянь Максвелла через аксіальне магнітне поле хвилі  $H_z$  за допомогою формул (5.47) і (5.48).

Вважаючи відмінність форми перерізу хвилеводу від кола малим ( $\delta_j \ll 1$ ), знайдемо розподіл поля  $H_z(r, \varphi)$  і власну частоту поперечних ПХ у такому хвилеводі. Аналіз крайової умови (5.64) з урахуванням доданків першого порядку малості за  $\delta_j$  дозволяє визначити з зазначеною точністю сталі  $C_{\pm}^{(2j)}$ , які входять до (5.72),

$$C_{\pm}^{(2j)} = -\delta_{2j} I_m(k_{\perp} R) [k_{\perp}^2 R^2 + m(m \pm 2j)(1 - \mu^2)] (2D_{m \pm 2j}^{(0)})^{-1} \Big|_{\omega = \omega_m^{(0)}}, \quad (5.73)$$

де

$$D_m^{(0)} = m\mu I_m(k_{\perp} R) + k_{\perp} R I_m'(k_{\perp} R), \quad (5.74)$$

Відмінність коефіцієнтів  $C_{\pm}^{(2j)}$  від нуля показує, що ПХ у прямокутному хвилеводі поширюються у вигляді пакета (5.72). Серед сателітів малої амплітуди ПХ можна виділити чотири групи. Одні сателіти ( $\propto \exp(i(m - 2j)\varphi)$ ), тут ціле  $j > 0.5m$ ) поширюються в напрямку, який є протилежним до напрямку поширення

основної гармоніки. Частка енергії  $\Delta W$ , що переносить ця група гармонік, є малою і вона тим менша, чим вищий номер основної гармоніки ( $\Delta W \propto m^{-4}$ ). Сателіти другої групи поперечних ПХ ( $\propto \exp(i(m+2j)\varphi)$ ) поширюються в одному напрямку із основною гармонікою, але з меншою кутовою фазовою швидкістю. Якщо азимутальний номер основної гармоніки  $|m| > 2$ , то серед сателітів існують такі, які поширюються в одному напрямку із основною гармонікою з кутовою фазовою швидкістю  $\omega/|m+j|$ , яка є більшою, ніж в основної гармоніки. Ці сателіти характеризуються кутовою залежністю  $\propto \exp(i(m-2j)\varphi)$ , де  $j < m/2$ . Крім того, якщо азимутальний номер основної гармоніки є парним, то серед малих сателітів один, для якого  $m=2j$ , виявляється аксіально - симетричним.

Поправки  $\omega_{m,j}^{(2)}$  до власної частоти ПХ

$$\omega = \omega_m^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{m,2n}^{(2)}, \quad (5.75)$$

які обумовлені відмінністю форми (5.64) перерізу хвилеводу від круглої, виявилися величинами другого порядку малості за параметром  $\delta_j$ . Вони дорівнюють,

$$\omega_{m,j}^{(2)} = -D_{m,j}^{(2)} \left( \frac{\partial D_m^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\omega=\omega_m^{(0)}}, \quad (5.76)$$

де

$$\begin{aligned} D_{m,j}^{(2)} = & 0.25\delta_j I_m(k_{\perp} R) (m^2 + 3k_{\perp}^2 R^2 - \mu^2 m^2) + 0.5\delta_j C_+^{(j)} [I'_{m+j}(k_{\perp} R) k_{\perp} R (1 + \mu m) \\ & + I_{m+j}(k_{\perp} R) (k_{\perp}^2 R^2 + (m+j)(m+\mu))] + 0.5\delta_j C_-^{(j)} [I'_{m-j}(k_{\perp} R) k_{\perp} R (1 + \mu m) \\ & + I_{m-j}(k_{\perp} R) (k_{\perp}^2 R^2 + (m-j)(m+\mu))] \Big|_{\omega=\omega_m^{(0)}}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Ми вважаємо поправки (доданки, що стоять під знаком суми в (5.75)) малими в порівнянні з  $\omega_m^{(0)}$ .

Ряд (5.75) швидко сходиться, оскільки при великих значеннях  $j$  (наприклад,

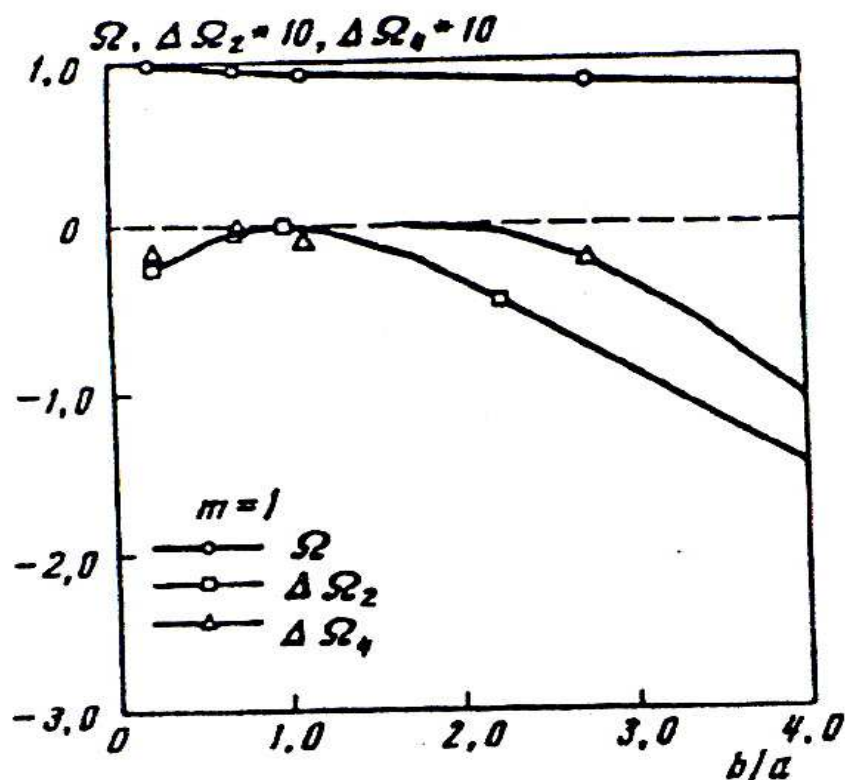


Рис. 5.13 Залежність нормованих на електронну циклотронну частоту частоти поперечних ПХ, азимутальний номер основної гармоніки якої  $m=1$ , у нульовому наближенні (криву позначено кільцями) і поправок до частоти (криві позначено квадратами і трикутниками), які обумовлені відмінністю форми перерізу хвильоводу від кола.

для квадратних хвильоводів великих розмірів) поправки  $\omega_{mj}^{(2)} \propto j^{-3}$ .

На рис. 5.13 і 5.14 представлено результати числового аналізу залежності частоти поперечних ПХ у НЧ діапазоні (4.4) від частки довжин сторін  $b/a$ . Було обрано наступні параметри хвильоводу: напруженість зовнішнього магнітного поля  $B_0 = 100$  Ое, довжина сторони  $a = 2$  мм. Хвильовід вважався заповненим  $n$ -Ge ( $n_e = 2.5 \times 10^{13}$  см $^{-3}$ ,  $M = 1.3 \times 10^{-27}$  г,  $\epsilon_0 = 16$ ). Зображено залежності (нормованих на електронну циклотронну частоту) власної частоти ПХ у нульовому наближенні  $\Omega = \omega_{m1}^{(0)} / |\omega_{ce}|$  і перших поправок  $\Delta\Omega_2 = \omega_{m,2}^{(2)} / |\omega_{ce}|$  і  $\Delta\Omega_4 = \omega_{m,4}^{(2)} / |\omega_{ce}|$ . Аналіз

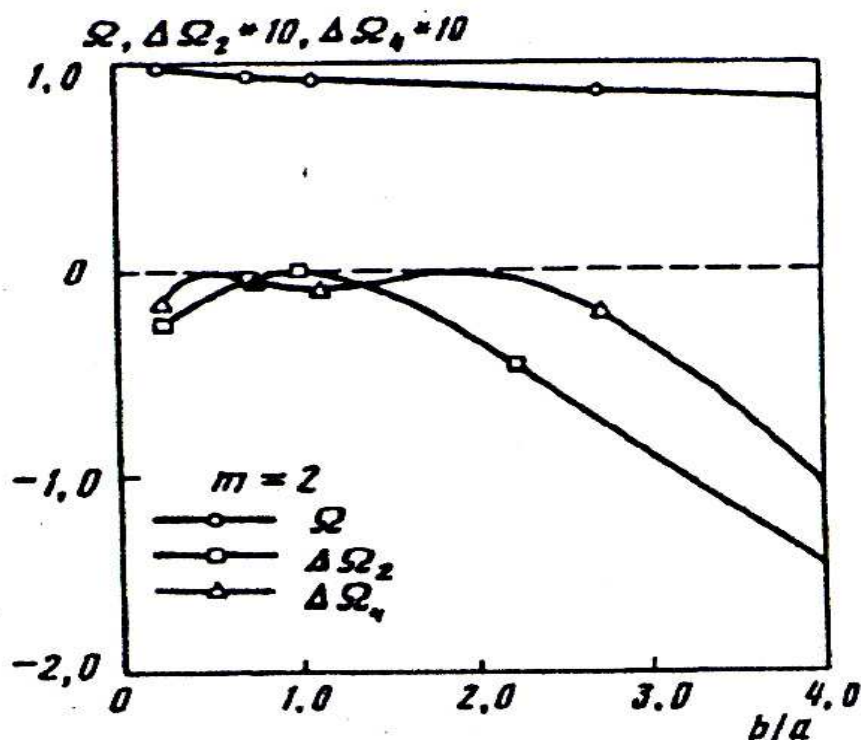


Рис. 5.14 Та сама залежність, що і на рис. 5.13, але для поперечних ПХ, азимутальний номер основної гармоніки яких  $m=2$ .

проведено для ПХ з азимутальними хвильовими числами основних гармонік  $m=1$  (рис. 5.13) і  $m=2$  (рис. 5.14). Поперечні ПХ у ВЧ діапазоні (4.5) при заданих значеннях параметрів плазмового хвильоводу не поширюються. Зменшення  $\Omega$  із зростанням частки  $b/a$  відповідає відомому [120] зменшенню  $\omega_m^{(0)}$  із зменшенням ефективного хвильового числа  $k_{ef}=|m|\delta/R$ . У всьому інтервалі зміни  $b/a$  ( $0.25 < b/a < 4$ ) припущення про малість поправки  $\omega_{m,j}^{(2)}$  виявляється добре виконаним. Коли форма перерізу хвильоводу є близькою до квадратної, поправка  $\omega_{m,2}^{(2)} \propto \lambda^2$  є малою в силу малості коефіцієнта  $\delta_2 \propto \lambda$  (див. (5.69)). Періодична неоднорідність кривини межі поділу напівпровідник - метал уздовж напрямку поширення ПХ відіграє роль структури, що уповільнює хвилю, ( $\omega_{m,j}^{(2)} < 0$ ).

Залежність поправки до частоти ПХ у прямокутному хвильоводі від

концентрації носіїв заряду, напруженості магнітного поля, лінійних розмірів хвилеводу є аналогічною досліджень в [146] для квадратного хвилеводу. Звернемо особливу увагу на основні особливості. Поправки  $\omega_{m,j}^{(2)}$  лінійно зростають зі збільшенням напруженості магнітного поля  $B_0$ . У хвилеводах великих розмірів і в хвилеводах, заповнених  $n$  - напівпровідниками з дуже високою концентрацією вільних електронів, коли  $k_{ef} < 0.3$ , власна частота ПХ у НЧ діапазоні стає малою ( $\omega_m^{(0)} \approx k_{ef} |\omega_{ce}|$  при  $R \gg |m| \delta$ ), а поправки  $\omega_{m,j}^{(2)}$  зростають за модулем. Тому для хвилеводів з такими параметрами не виконується умова  $|\omega_{m,j}^{(2)}| \ll \omega_m^{(0)}$  застосовності нашого методу. У хвилеводах малих розмірів, а також заповнених  $n$  - напівпровідниками з дуже малою концентрацією вільних електронів, коли  $k_{ef} > 1$ , поправки  $\omega_{m,j}^{(2)}$  є малими в порівнянні з величиною власної частоти. Величина власної частоти ПХ залежить від геометричних розмірів прямокутного хвилеводу на відміну від ПХ в однорідному плоскопаралельному шарі [117]. Ця відмінність пояснюється тим, що частота ПХ у шарі залежить від величини поперечного хвильового числа, роль якого у випадку прямокутного хвилеводу грає частка  $(m/R)$ .

Як приклад розглянемо поширення ПХ у хвилеводі перерізом  $b \times a = 1 \text{ мм} \times 2 \text{ мм}$ , який заповнено  $n$  - напівпровідником із зазначеними вище параметрами. При обчисленні власної частоти по формулах (5.75) - (5.77) обмежимося першими чотирма малими доданками. Відзначимо, що рівняння перерізу хвилеводу (5.64), якщо в його правій частині залишити тільки перші чотири малих доданки, дуже добре описує прямокутник з часткою сторін  $b/a = 1/2$ . Переріз хвилеводу з розмірами  $1 \text{ мм} \times 2 \text{ мм}$ , який побудовано із зазначеною вище точністю, приведено на рис. 5.15 штрих - пунктирною кривою. Площа фігури, утвореної між цією кривою і периметром прямокутника (суцільні лінії), складає менш 4 % від площі прямокутника.

Найнижчою власною частотою в такому хвилеводі характеризується поперечна ПХ у НЧ діапазоні з азимутальним номером основної гармоніки  $m = 1$ .

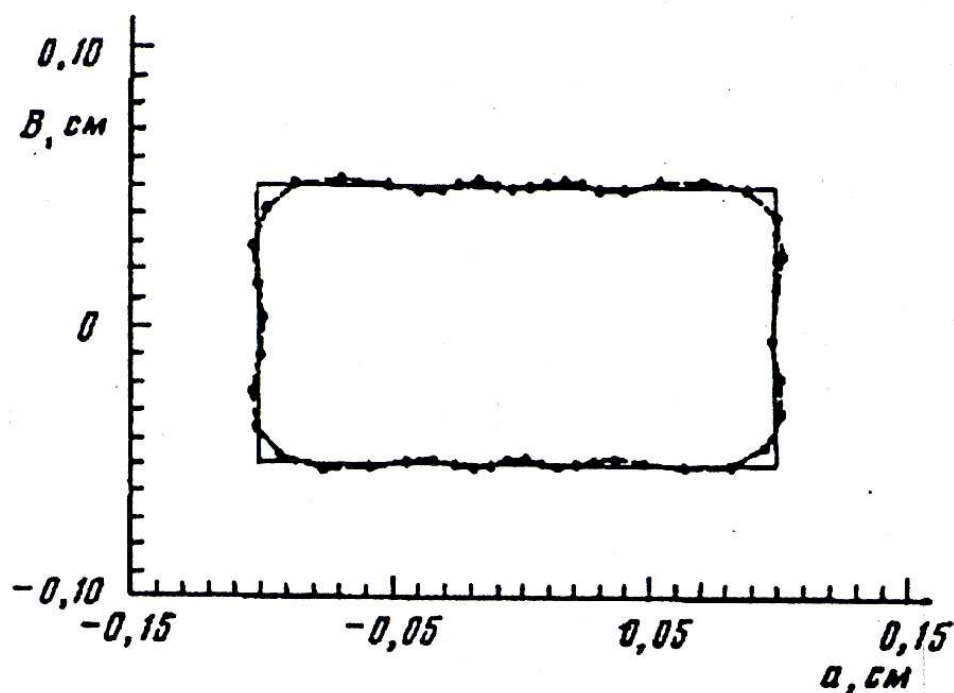


Рис. 5.15 Переріз прямокутника: точний (наведено суцільною лінією) і такий, що змодельовано з урахуванням чотирьох малих доданків у рівнянні (5.64) (наведено штрих – пунктирною лінією).

Ця частота  $\omega \approx |\omega_{ce}|(\Omega + \Delta\Omega_2 + \Delta\Omega_4 + \Delta\Omega_6 + \Delta\Omega_8) = 1.95 \times 10^{10}(0.914 - 0.034 - 1.05 \times 10^{-4} - 2.842 \times 10^{-3} - 2.132 \times 10^{-3}) = 1.707 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ , тобто поправки складають менш 4.3 % від основного доданка. Відзначимо, що період розглянутої ПХ  $T = 3.681 \times 10^{-10} \text{ с}$  є малим у порівнянні з часом життя вільних електронів  $\tau = 10^{-5} \text{ с}$ , що підтверджує застосовність використаної нами моделі плазми без зіткнень. Властивості ПХ у такому хвилеводі є близькими до властивостей АПХ у круглому хвилеводі ефективного радіуса  $R = 0.0766 \text{ см}$ . Глибина проникнення поля цієї ПХ до плазми  $n - \text{Ge } k_{\perp}^{-1} = 0.142 \text{ см}$  є більшою за  $R$ . Тому для визначення власної частоти в нульовому наближенні можна скористатися асимптотикою (4.105). Відповідне значення  $\omega_m^{(0)}$  дорівнює  $1.773 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ , що відрізняється від значення, яке отримано внаслідок числового розв'язання дисперсійного рівняння, менше, ніж на 1 %.



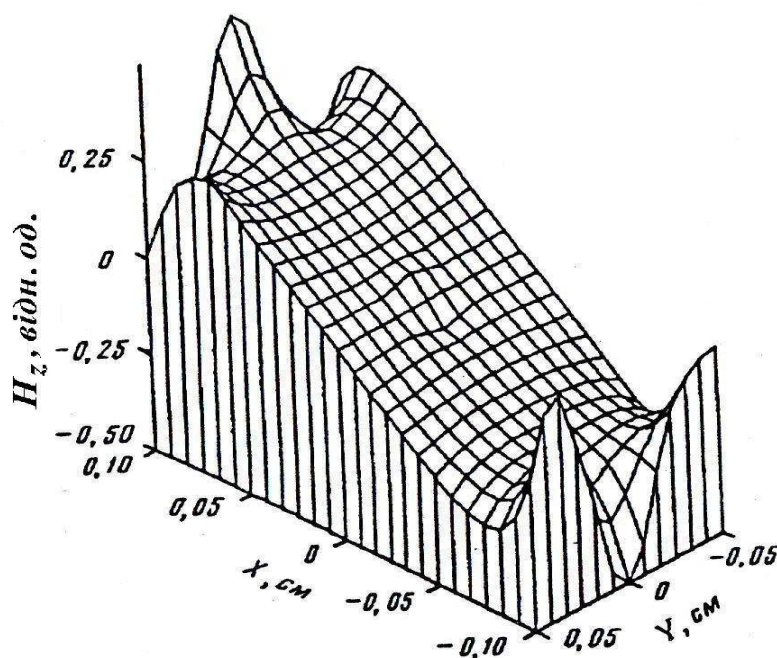


Рис. 5.16 Розподіл аксіальної складової магнітного поля поперечних ПХ з азимутальним номером основної гармоніки  $m=1$  у перерізі хвильоводу.

Числовий аналіз розподілу полів ПХ показує, що амплітуда магнітного компонента ПХ у прямокутному хвильоводі з розглянутими параметрами є на порядок більшою за амплітуди електричних полів. Розподіл аксіального компонента магнітного поля поперечних ПХ у перерізі хвильоводу показано на рис. 5.16. Амплітуди сателітів  $\propto \exp(-i\varphi)$  і  $\propto \exp(-3i\varphi)$ , що поширюються в напрямку, зворотному напрямку основної гармоніки, складають, наприклад, відповідно 4% і 0.1% від амплітуди основної гармоніки. Сателіти іншої групи, що мають кутову залежність  $\propto \exp(i(m+2j)\varphi)$ , мають один напрямок із основною гармонікою і характеризуються кутовою фазовою швидкістю  $\omega/(m+2j)$ , що менше швидкості основної гармоніки. Амплітуди відстаючих сателітів є більшими, ніж у протилежно спрямованих. Вони складають, наприклад, для сателітів  $\propto \exp(3i\varphi)$  і  $\propto \exp(5i\varphi)$ , відповідно, 18% і 1.2% від амплітуди основної гармоніки. Для ПХ, основна гармоніка яких характеризується азимутальним номером  $m>2$ , має місце зворотне

співвідношення між амплітудами сателітів ( $C_{-}^{(2j)} I_{m-4}(k_{\perp} R) > C_{+}^{(2j)} I_{m+4}(k_{\perp} R)$ ).

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі показано, що в металевих хвильоводах майже прямокутного перерізу, які повністю заповнено  $n$  – напівпровідниками і які поміщено в аксіальне зовнішнє магнітне поле (геометрія Фойгта), поширюються незвичайні електромагнітні поверхневі хвилі. Власну частоту цих ПХ визначено (див. (5.75) - (5.77)) з точністю до доданків другого порядку за малим параметром  $\delta_j$  (див. (5.66)), що характеризує відхилення форми перерізу (5.64) хвильоводу від кола. Проведено аналіз залежності частоти ПХ від параметрів хвильоводу. Розподіл полів поперечних ПХ знайдено (див. (5.72), (5.94), (5.73) і рис. 5.16) з точністю до доданків першого порядку малості. Показано, що поперечні ПХ у прямокутному хвильоводі поряд з основною гармонікою  $\propto \exp(im\varphi)$  містять нескінченне число малих сателітних гармонік. Це означає, що поширення монохроматичної ПХ у напрямку, перпендикулярному магнітному полю є неможливим у хвильоводах прямокутного перерізу (так само, як і в інших хвильоводах некруглого перерізу), і є можливим тільки в круглих циліндричних хвильоводах [120] (включаючи і коаксіальні шари [254]) чи уздовж плоскої межі поділу плазма - метал [116] (включаючи плоскопаралельні шари [117]). Вибір геометричних розмірів хвильоводу дає можливість керувати спектральним складом ПХ (див. (5.72), (5.73)).

Поперечні електромагнітні ПХ поширюються також і поблизу поверхні металевого стрижня майже прямокутного перерізу, якого орієнтовано паралельно до зовнішнього магнітного поля й оточено товстим (у порівнянні з глибиною  $k_{\perp}^{-1}$  проникнення поля поперечних ПХ) шаром  $n$  - напівпровідника. Розподіл полів поперечних ПХ, і значення власної частоти поперечних ПХ визначаються при цьому виразами (5.72), (5.47), (5.48), (5.73) - (5.77) при заміні в них модифікованих функцій Бесселя функціями Макдональда тих самих порядків і аргументів. Основна гармоніка цих ПХ поширюється з позитивними азимутальними номерами у ВЧ - діапазоні (4.4) і з негативними - у НЧ - діапазоні (4.5).

## 5.6. Поперечні поверхневі магнітоплазмові хвилі в металевому хвилеводі прямокутного перерізу, який заповнено двома шарами $n$ -напівпровідників

ХПТ на межі магнітоактивної плазми з металом уперше були виявлені [121] у  $n$ - напівпровідниковому зразку саме прямокутного перерізу. Тому теоретичне вивчення дисперсійних властивостей цих ХПТ природно почалося з моделі плазмового півпростору, що межує з металом [255, 256]. При подальшому розвитку цієї моделі були досліджені ХПТ у плоскопаралельному шарі, обмеженому металом [117], і далі - у двошаровій плазмовій структурі, обмеженій металом [257]. Однак наступний крок - врахування скінченності обох поперечних розмірів - зіштовхнувся з неможливістю поділу перемінних у декартових координатах. Тому дисперсійні властивості ХПТ, що поширюються поперек осі плазмовонаповненого циліндричного хвилеводу квадратного [146], а потім і прямокутного [148] перерізу, було досліджено на основі теорії АПХ [120], що поширюються поперек осі симетрії циліндричного хвилеводу круглого перерізу. При цьому виявилось, що навіть у випадку хвилеводу, що має своїм поперечним перерізом прямокутник, сторони якого розрізняються в два рази, застосування методу послідовних наближень дозволяє в окремих випадках визначити частоту ХПТ із точністю до 4 % вже в нульовому наближенні [148].

Підрозділ 5.6 являє собою подальший крок у розвитку електродинамічної теорії ХПТ, що поширюються поперек зовнішнього магнітного поля в циліндричному хвилеводі майже прямокутного перерізу. На додаток до попередніх робіт [146, 148] в цьому підрозділі досліджено поперечні електромагнітні ХПТ у металевому хвилеводі майже прямокутного перерізу, який повністю заповнено двома плоскопаралельними шарами  $n$  - напівпровідників.

Нехай симетричний уздовж осі  $Z$  ( $\partial / \partial z = 0$  у циліндричних координатах) металевий хвилевід прямокутного перерізу  $a \times (b+d)$  буде повністю заповнений двома шарами різних напівпровідників  $n$  – типу (див. рис. 5.17). Один напівпровідниковий шар (з концентрацією  $n_{el}$  вільних електронів, ефективною масою електронів  $M_l$  і діелектричною проникливістю ґратки  $\varepsilon_{0l}$ ) прямокутного попе-

речного перерізу  $a \times (0.5b + d)$  заповнює верхню частину хвилеводу ( $0 < \varphi < \pi$ ). Другий напівпровідниковий шар ( $n_{e2}$  - концентрація вільних електронів,  $M_2$  - ефективна маса електронів провідності і  $\varepsilon_{02}$  - діелектрична проникливість кристалічної ґратки) прямокутного перерізу  $a \times 0.5b$  заповнює нижню частину хвилеводу ( $-\pi < \varphi < 0$ ). Зовнішнє магнітне поле спрямоване уздовж осі хвилеводу, тобто  $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$ .

Систему координат вибираємо в спосіб, який зображено на рис. 5.17. Початок координат поміщаємо в центрі відрізка, що розділяє два напівпровідникових шари. Вісь  $X$  направляємо уздовж зазначеної межі поділу, при цьому вісь  $Y$  служить віссю симетрії задачі. Рівняння для прямокутної утворюючої в циліндричній системі координат  $r, \varphi, z$  має вигляд

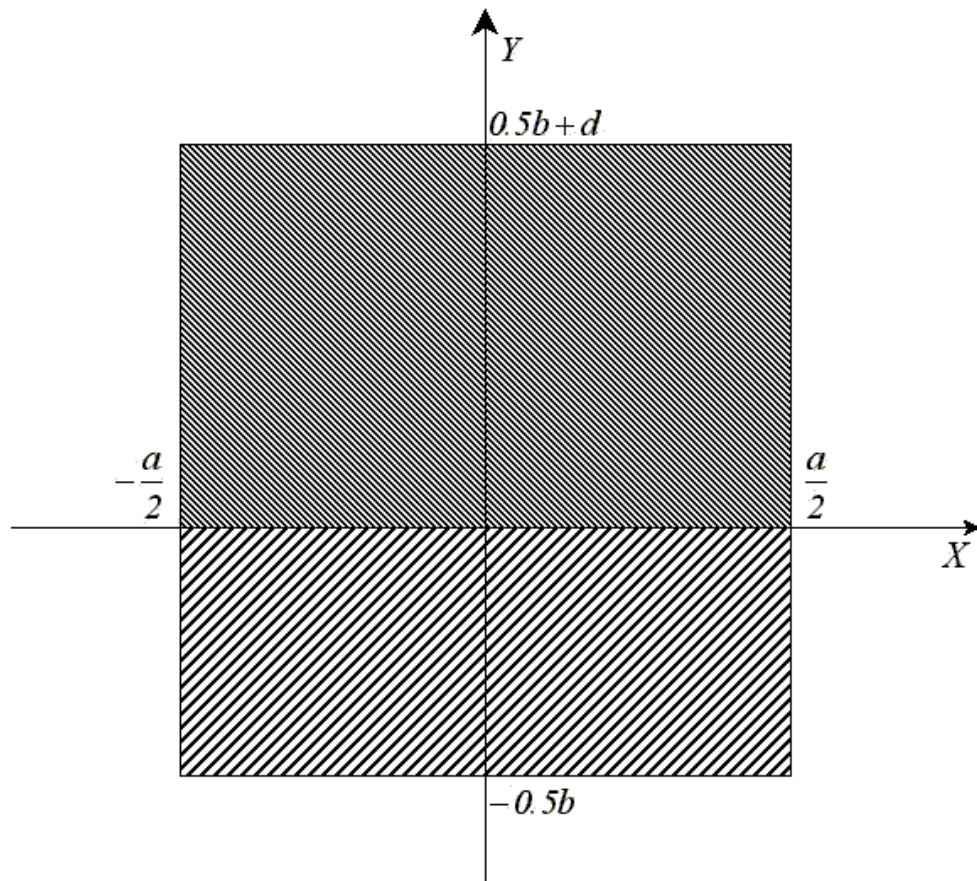


Рис. 5.17 Схематичне зображення перерізу досліджуваного хвилеводу прямокутного перерізу, який заповнено двома плоско паралельними шарами  $n$ -напівпровідників.

$$R_2 = R \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{2n} \cos 2n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi \right), \quad (5.78)$$

де середній радіус хвильоводу дорівнює

$$R = R(d=0) + \frac{1}{2\pi} \left\{ a \ln \left| \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_0} \frac{1 - \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_1} \right| + (b+2d) \ln \frac{1 + \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} + b \ln \frac{\sin \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0} \right\}, \quad \text{tg} \varphi_0 = \frac{b}{a}; \quad \text{tg} \varphi_1 = \frac{b+2d}{a}. \quad (5.79)$$

Усі коефіцієнти Фур'є  $\delta_{2n}$  і  $\sigma_{2n+1}$  у рівнянні (5.78) виражаються через елементарні функції. Відзначимо, що в розкладанні (5.78) відрізняються від нуля тільки коефіцієнти з парними номерами при косинусах і коефіцієнти з непарними номерами при синусах.

Наприклад, у випадку напівпровідникових шарів рівної товщини ( $d=0$ ) середній радіус хвильоводу визначається формулою (5.69), усі коефіцієнти  $\sigma_{2n+1}=0$ , (наочні аналітичні вирази для  $\delta_2$  і  $\delta_4$  у цьому випадку задано формулами (5.71) і (5.72)).

Якщо ширини шарів несильно розрізняються, коефіцієнти  $\sigma_{2n+1}$  виявляються малими в порівнянні з коефіцієнтами  $\delta_{2n}$ ,  $\sigma_{2n+1} \sim (d/b) \delta_{2n}$ . Як показав числовий аналіз [148], якщо сторони прямокутника розрізняються не занадто сильно,  $0.4a < (b+d) < 2.5a$ , коефіцієнти  $\delta_{2n}$  є досить малими, і, отже, можна користуватися методом послідовних наближень для дослідження дисперсійних властивостей ПХ у прямокутному хвильоводі з однорідним заповненням. При цьому малими параметрами служать коефіцієнти  $\delta_{2n}$  і  $\sigma_{2n+1}$ , а властивості досліджуваних ПХ є близькими (збігаються в нульовому наближенні) до властивостей АПХ, що поширюються в круглому хвильоводі з ефективним радіусом  $R$ , визначеним формулою (5.79).

Електродинамічні властивості напівпровідникового плазмового середовища визначаються компонентами тензора діелектричної проникливості у вигляді (4.164) – (4.167). Періодичну кутову залежність компонентів  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  зручно виразити через східчасту узагальнену функцію у вигляді (4.168). З викорис-

танням функції  $\theta$  компоненти  $\varepsilon_{l,2}$  мають вигляд (4.169) – (4.170). Будемо вважати тут, що розбіжність між властивостями напівпровідників є малою,  $|\varepsilon_{l,2}^{(1)}| \ll |\varepsilon_{l,2}^{(0)}|$ . Малість частки  $|\varepsilon_{l,2}^{(1)} / \varepsilon_{l,2}^{(0)}|$  дозволяє скористатися методом послідовних наближень для дослідження впливу неоднорідності напівпровідникового наповнення на дисперсійні властивості ПХ. За нульове наближення вибираємо азимутальні поверхневі хвилі, що поширюються за азимутом в круглому металевому хвилеводі радіуса  $R$  (див. визначення (5.79)), повністю заповненому  $n$ -напівпровідником з усередненими властивостями, що відповідають компонентам  $\varepsilon_{l,2}^{(0)}$  тензора діелектричної проникливості (див. визначення (4.170)). Основні відомості про дисперсійні властивості АПХ наведено на початку розділу 4.

Дисперсійне рівняння одержимо з умови (5.11) рівності нулю тангенціального компонента електричного поля хвилі на металевій поверхні, при цьому залежність  $R_2(\varphi)$  визначається рівнянням (5.78).

Відповідно до рівнянь Максвелла радіальний і азимутальний компоненти електричного поля виражаються через аксіальний компонент магнітного поля ПХ за допомогою формул (5.47) і (5.48).

Дослідимо вплив форми перерізу хвилеводу на властивості поперечних ПХ. Відзначимо насамперед, що якщо напівпровідникові шари мають однакову товщину, то врахування того факту, що хвилевід має прямокутний, а не круглий, переріз, призводить до виникнення поправок до частоти тільки наступного порядку малості, а саме порядку  $\varepsilon_l^{(1)2} \delta_{2n}$ . Тому для дослідження дисперсійних властивостей ПХ у прямокутних хвилеводах, повністю заповнених двома напівпровідниковими шарами рівної товщини, досить аналізу, проведеного в попередніх підрозділах 4.6 і 5.5. Ця обставина пояснюється розбіжністю спектральних складів неоднорідності (див. формули (4.168) і (4.169)) напівпровідникового заповнення і прямокутної утворюючої (див. формулу (5.78)). На відміну від формули (4.168), що містить Фур'є - гармоніки тільки з непарними номерами моди, вираз (5.78) для утворюючої містить Фур'є - гармоніки тільки з парними

номерами.

Якщо ж шари напівпровідникового заповнення мають різну товщину, то в рівнянні (5.78) прямокутної утворюючої виникають малі Фур'є - гармоніки з непарними номерами, їхні амплітуди дорівнюють

$$\sigma_N = \frac{1}{R\pi} \left[ a \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sin N\varphi}{\cos \varphi} d\varphi + \left( \frac{b}{2} + d \right) \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} \frac{\sin N\varphi}{\sin \varphi} d\varphi - \frac{b}{2} \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \frac{\sin N\varphi}{\sin \varphi} d\varphi \right]. \quad (5.80)$$

На рис. 5.18 приведено графіки залежності коефіцієнтів  $\sigma_1$  (суцільна лінія) і  $\sigma_3$  (штрихова лінія) від частки  $d/b$ . Розрахунки проведено для випадку  $a=b$ .

Якщо товщини шарів розрізняються мало,  $d \ll b$ , то амплітуди  $\sigma_N$  (5.80) можна приблизно обчислити за наступними формулами:

$$\sigma_1 \approx \frac{d}{\pi R} (\pi - 2\varphi_1), \quad (5.81)$$

$$\sigma_3 \approx \frac{d}{\pi R} \left[ \frac{8a^3b}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{12ab}{a^2 + b^2} + \pi - 2\varphi_1 \right]. \quad (5.82)$$

Щоб визначити вплив розбіжності в товщині шарів на власну частоту ПХ, слід підставити до крайової умови (5.11) вирази для полів з точністю до додан-

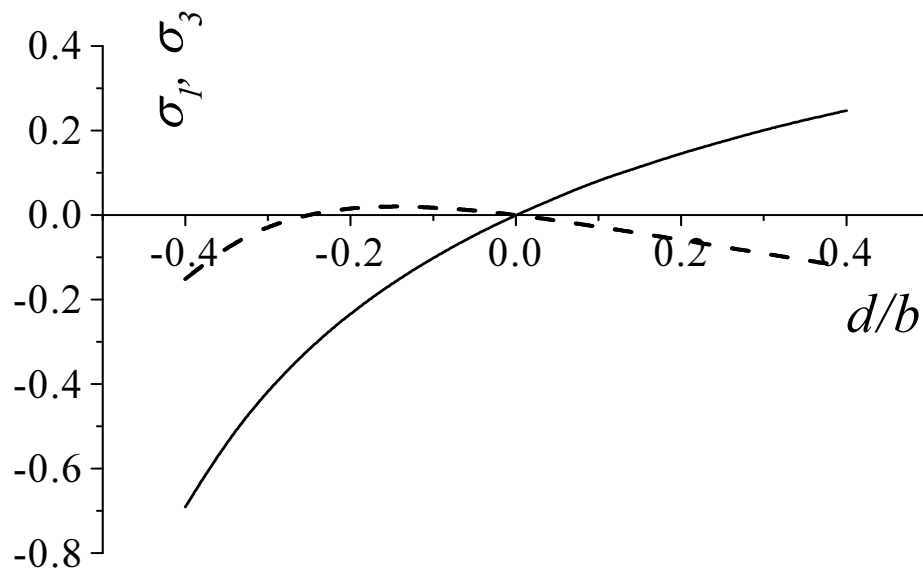


Рис. 5.18 Залежність коефіцієнтів Фур'є  $\sigma_1$  (суцільна лінія) і  $\sigma_3$  (штрихова лінія) від розбіжності в товщинах шарів  $n$  - напівпровідників.

ків першого порядку малості по неоднорідності напівпровідникового заповнення. Виділивши в крайовій умові (5.11) доданки, які є пропорційними до  $\exp(im\varphi)$ , одержуємо дисперсійне рівняння у наступному вигляді,

$$D^{(0)} + D_d^{(l+1)} = 0. \quad (5.83)$$

Розв'язок  $\omega_m^{(0)}$  дисперсійного рівняння в нульовому наближенні

$$D^{(0)}(\omega_m^{(0)}) = 0, \quad (5.84)$$

де

$$D_m^{(0)} = \frac{m\mu}{N_{\perp}^2} I_m(k_{\perp}^{(0)} R) + \frac{k_{\perp}^{(0)} R}{N_{\perp}^2} I'_m(k_{\perp}^{(0)} R), \quad (5.85)$$

вважаємо відомим. Тут  $N_{\perp}^2 = (ck_{\perp}^{(0)} / \omega)^2$ . Малий доданок  $D_d^{(l+1)}$  є пропорційним як до малої різниці  $d$  у товщині шарів напівпровідникового заповнення, так і до першого ступеню неоднорідності напівпровідникового заповнення,

$$D_d^{(l+1)} = \frac{R\sigma_N}{2iN_{\perp}^2} \left\{ \frac{\mu^{(0)}}{R} [(m+N)\varepsilon_+^{(l)} - (m-N)\varepsilon_-^{(l)}] + \mu^{(0)} \left[ (m-N) \frac{d\varepsilon_-^{(l)}}{dr} - (m+N) \frac{d\varepsilon_+^{(l)}}{dr} \right] + R \frac{d^2}{dr^2} (\varepsilon_-^{(l)} - \varepsilon_+^{(l)}) \right\} \Bigg|_{\substack{r=R \\ \omega=\omega_m^{(0)}}}. \quad (5.86)$$

Тут амплітуди  $\varepsilon_{\pm}^{(l)}$  сателітних гармонік, які обумовлені відмінністю форми перерізу хвильоводу від кола, визначено формулами (4.176) – (4.178). Відповідна поправка  $\omega_d^{(l+1)}$  до частоти ПХ дорівнює

$$\omega_d^{(l+1)} = -D_d^{(l+1)} \left( \frac{\partial D^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \Bigg|_{\omega=\omega_m^{(0)}}. \quad (5.87)$$

У випадку поширення ПХ у широкому хвильоводі,  $k_{\perp} R \gg |m|$ , для поправки  $\omega_d^{(l+1)}$  можна одержати наступний асимптотичний вираз для ПХ із НЧ діапазону (4.4),

$$\omega_d^{(l+1)} = \frac{\sigma_N}{N} (k_{\perp} R) \left[ \frac{\varepsilon_1^{(l)}}{\varepsilon_1^{(0)}} - 2 \frac{\varepsilon_2^{(l)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \right] \omega_m^{(0)}, \quad (5.88)$$

і для ПХ із ВЧ діапазону (4.5),



$$\omega_d^{(l+1)} = \frac{\sigma_N}{N} \varepsilon_l^{(1)}(k_\perp R) \omega_m^{(0)}. \quad (5.89)$$

Якщо ж ПХ поширюються у вузькому,  $k_\perp R \ll |m|$ , хвилеводі, то поправка  $\omega_d^{(l+1)}$  дорівнює в НЧ діапазоні частот,

$$\omega_d^{(l+1)} = \frac{\sigma_N}{4} \left( \frac{2\delta}{R} \right)^{N+2} (m + N - l) m \frac{\varepsilon_2^{(1)} + \varepsilon_l^{(1)}}{\varepsilon_l^{(0)}} \omega_m^{(0)}, \quad (5.90)$$

і у ВЧ діапазоні частот,

$$\omega_d^{(l+1)} = -\frac{\sigma_N}{32} (|m| + N + l) \left( \frac{2\delta}{R} \right)^{N+2} |m| (\varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_l^{(1)}) \omega_m^{(0)}. \quad (5.91)$$

Підіб'ємо підсумки. У цьому підрозділі показано, що в металевих хвилеводах прямокутного перерізу, які повністю заповнено двома шарами різних  $n$ -напівпровідників, які поміщено у поздовжнє зовнішнє магнітне поле (геометрія Фойгта), можуть поширюватися незвичайні електромагнітні поверхневі хвилі. Дисперсійні властивості цих хвиль досліджено методом послідовних наближень. Вдалий вибір нульового наближення (див. визначення (5.79) і (4.169) – (4.170)) скорочує процедуру визначення власної частоти і полів власних мод хвилеводу унаслідок відсутності поправок першого порядку малості у власної частоти й амплітуди основної гармоніки.

Це дослідження завершує узагальнення теорії АПХ [120], які поширюються поперек аксіального сталого магнітного поля вздовж межі плазми з металевою камерою круглого перерізу, на випадок поперечних ПХ, які поширюються у хвилеводах майже прямокутного перерізу, які заповнено двома шарами  $n$ -напівпровідників різної товщини (див. рис. 5.19).

Власну частоту цих ПХ визначено з точністю до доданків другого порядку малості. Поправки до власних частот обумовлені двома факторами: відхиленням форми (5.78) перерізу хвилеводу від кола, а також відмінністю електродинамічних властивостей напівпровідникових шарів. Отримано наочні аналітичні вирази (див. (4.189) - (4.192), а також (5.88) - (5.91)) для поправок до частоти на границі вузьких і широких хвилеводів. Аналіз цих виразів показує, що запропонований в даній дисертації підхід не можна застосовувати для до-

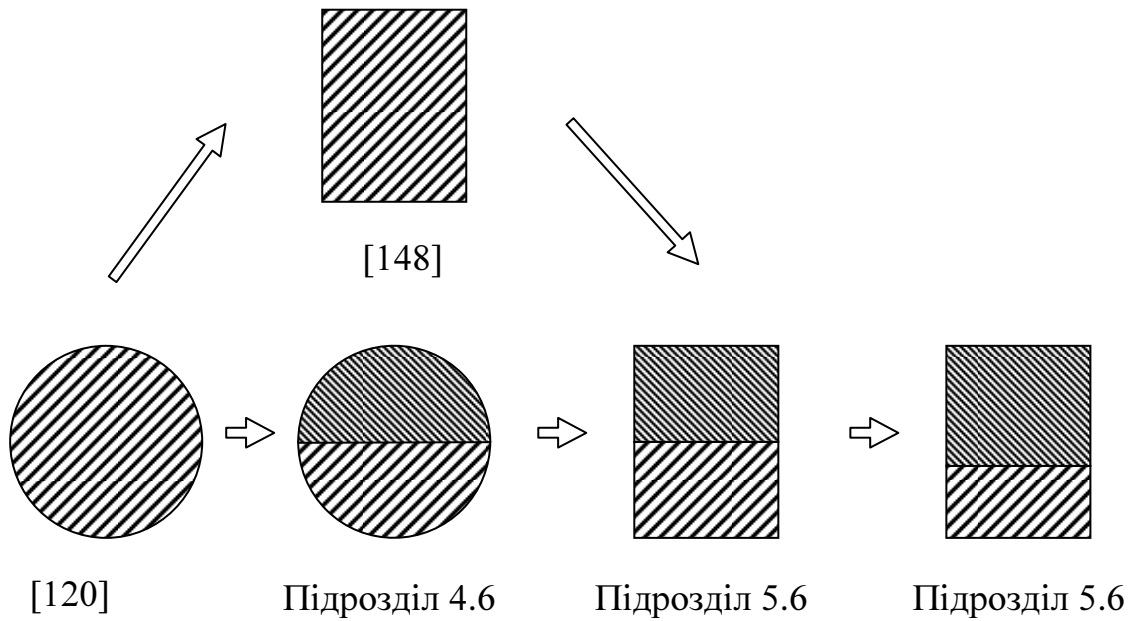


Рис. 5.19 Трансформація моделі поперечного перерізу хвильоводу від круглого хвильоводу з однорідним напівпровідниковим заповненням до хвильоводу прямокутного перерізу з двошаровим заповненням.

слідження дисперсійних властивостей розглянутих хвиль у вузьких хвильоводах. Якщо властивості напівпровідникових шарів у випадку широких хвильоводів мало розрізняються, а саме,

$$\left| \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \left( \frac{2\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} - \frac{\varepsilon_l^{(1)}}{\varepsilon_l^{(0)}} \right) \right| \ll 7 \frac{R\omega_{pe}}{c} \quad (5.92)$$

у випадку поперечних ПХ із НЧ діапазону (4.4), та

$$\left| \frac{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_l^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \right| \ll 7 \frac{k_{\perp} R \omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^2} \quad (5.93)$$

у випадку ПХ із ВЧ діапазону (4.5), то відмінність дисперсійних властивостей ПХ від властивостей АПХ обумовлена, в основному, відмінністю форми перерізу хвильоводу від кола, що докладно вивчено в [148]. Оскільки коефіцієнти Фур'є в рівнянні (5.78) прямокутної утворюючої є невеликими (наприклад, у випадку квадрата  $\delta_4 \approx -0.14$ ), то розбіжність діелектричних властивостей напівпровідникових шарів у дійсності може виявитися важливішою. У цьому випадку стають справедливими сильні нерівності, зворотні умовам (5.92) і (5.93), і

дисперсійні властивості розглянутих тут поперечних ПХ є аналогічними властивостям поперечних ПХ у круглому хвилеводі з двошаровим напівпровідниковим заповненням, які вивчено у підрозділі 4.6.

За рівних інших умов вплив неоднорідності напівпровідникового заповнення сильніше позначається у випадку шарів різної товщини. Якщо товщини цих шарів розрізняються настільки, що виконується нерівність:

$$\sigma_N \gg \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \frac{\delta}{R}, \quad (5.94)$$

то відмінність дисперсійних властивостей ПХ від властивостей АПХ, що поширюються в круглому хвилеводі, визначається спільним впливом двох факторів: розбіжністю розмірів і електродинамічних властивостей шарів. Саме цю задачу досліджено в підрозділі 5.6.

Радіальний розподіл основної гармоніки ПХ знайдено (див. (4.171) і (4.182)) з точністю до доданків другого порядку малості. Показано, що амплітуди (4.176) перших сателітних гармонік є на порядок меншими за амплітуду основної гармоніки.

Задачу про розподіл полів і власні частоти поперечних ПХ, що поширюються в круглому циліндричному хвилеводі з неоднорідним  $n$ - напівпровідниковим заповненням, розв'язано в підрозділі 4.6 як проміжний крок на шляху до дослідження ПХ у хвилеводі прямокутного перерізу з двошаровим заповненням.

Поперечні електромагнітні ПХ можуть поширюватися також і поблизу поверхні широкого,  $k_{\perp} R \gg |m|$ , металевого стрижня майже прямокутного перерізу, який орієнтовано паралельно до зовнішнього магнітного поля і який лежить на плоскій межі двох товстих (у порівнянні з глибиною  $k_{\perp}^{-1}$  проникнення поля ПХ) шарів  $n$  - напівпровідників. Розподіл полів поперечних ПХ і значення власної частоти ПХ можна визначити в цьому випадку, використавши методику, яку розроблено в підрозділах 4.6 і 5.6. Основна гармоніка цих ПХ поширюється з позитивними азимутальними номерами у ВЧ діапазоні (4.5) і з негативними - у НЧ діапазоні (4.4).

### 5.7. Висновки до п'ятого розділу

У цьому розділі досліджено поширення хвиль поверхневого типу у плазмових хвилеводах некруглого перерізу. Показано, що періодична вздовж азимуту зміна кривини межі поділу плазмового стовпа із діелектричним шаром і/або металеві камери спричиняє поширення ХПТ у вигляді хвильового пакета.

У загальному випадку в такому пакеті поряд з основною гармонікою враховано дві найближчі сателітні гармоніки, чії амплітуди визначено як величини першого порядку за малим параметром, який характеризує відмінність форми перерізу межі поділу від круглої. При цьому поправку до власної частоти, яку обумовлено відмінністю форми перерізу межі поділу від круглої, пораховано як малу величину другого порядку.

Показано, що періодична азимутальна неоднорідність вільного плазмового хвилеводу призводить до розщеплення спектрів поперечних ХПТ, якщо кутовий період неоднорідності товщини діелектричного шару, який відокремлює плазмову вставку довільного перерізу від металеві камери довільного перерізу, дорівнює половині кутового періоду хвилі. Встановлено, що величина цього розщеплення є величиною першого порядку малості. Поправка до власної частоти, яку обумовлено неоднорідністю товщини діелектричного шару, є більшою, якщо неоднорідною є кривина межі поділу саме плазми з діелектричним шаром, порівняно з випадком, коли змінною є кривина металеві камери.

Теоретично доведено можливість поширення ХПТ поперек зовнішнього аксіального магнітного поля вздовж межі плазми з металеві камерою довільного перерізу аж до майже прямокутного. Якщо такий хвилевод заповнено двома шарами  $n$  - напівпровідників із різними діелектричними властивостями, то вплив неоднорідності напівпровідникового заповнення за рівних інших умов виявляється сильнішим у випадку шарів різної товщини.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі здобувачем вперше наведено узагальнені результати теоретичного дослідження дисперсійних властивостей швидких магнітозвукових і альфвенівських хвиль, що поширюються в пристроях керованого термоядерного синтезу, з урахуванням особливостей тривимірної неоднорідності зовнішнього магнітного поля: гвинтової – для торсатрона і гофрування – для токамака. Визначено тонку структуру АР для основної і сателітних гармонік і пораховано величину високочастотної потужності, яка поглинається в АР, для обох типів неоднорідності. З'ясовано особливості поширення і поглинання АХ, які обумовлені немонотонністю просторових розподілів параметрів плазми. Розвинуто електродинаміку поверхневих хвиль, які поширюються поперек або майже поперек осі в ізотропних і магнітоактивних циліндричних і тороїдних хвильоводах круглого та довільного перерізів, повністю або частково наповнених плазмою. Новизну здобутих результатів підтверджено пріоритетом в опублікуванні наукових статей за темою дисертації, а їх достовірність визначається використанням адекватних методів розв'язання задач та їх апробацією на численних міжнародних конференціях. Результати виконаних досліджень можна використовувати для планування і пояснення експериментів із нагрівання плазми МГДХ, діагностики плазми, пояснення експериментів із збудження ХПТ у радіотехнічних пристроях, з'ясування причин посиленої взаємодії плазма - стінка в термоядерних пастках. Вони можуть бути корисними при розробці приладів із неруйнівного контролю властивостей поверхонь і різного типу покриттів на напівпровідниках, а також джерел плазми на ХПТ.

Наведемо основні результати, що здобуто в даній дисертаційній роботі:

1. Встановлено вплив, який справляє просторова періодична неоднорідність плазми на поширення, конверсію і поглинання об'ємних і поверхневих електромагнітних хвиль. Передовсім, просторова періодична неоднорідність плазми спричиняє зачеплення просторових гармонік полів електромагнітних хвиль, тобто

хвилі поширюються в такій плазмі у вигляді хвильових пакетів.

1.1. Виявляється, що обумовлена такою періодичністю поправка  $\delta\omega$  до власної частоти  $\omega=\omega_0+\delta\omega$  хвиль у загальному випадку є величиною другого порядку за малим параметром, який характеризує неоднорідність плазми,  $\delta\omega \propto \epsilon_h^{(l)2}$ . За умов, коли довжина хвилі основної гармоніки є вдвічі більшою за просторовий період неоднорідності плазми в напрямку поширення хвилі, спектри хвиль розщеплюються неоднорідністю плазми, що можна спостерігати експериментально. При цьому поправки до частот виявляються величинами першого порядку малості,  $\delta\omega \propto \epsilon_h^{(l)}$ , і власними модами є стоячі хвилі з близькими частотами.

1.2. Встановлено можливість існування, поряд з АР для основної гармоніки, додаткових резонансних областей (САР) у плазмі, яка є періодично неоднорідною в напрямку зовнішнього магнітного поля. В цих САР відбуваються підростання малих сателітних гармонік МГД хвиль і їхня конверсія в дрібномасштабні хвилі. Визначено умови, за яких додаткове нагрівання плазми поблизу САР може бути істотним.

1.3. Знайдено, що розрив розв'язків рівнянь Максвелла для полів електромагнітних хвиль, який має місце у випадку холодної плазми в однорідному магнітному полі, усувається у периферійній плазмі пасток КТС періодичною неоднорідністю зовнішнього магнітного поля. З'ясовано, що при цьому тонка структура основного і сателітних АР може визначатись модуляцією  $\delta$  радіальної складової зовнішнього магнітного поля (а не тепловим рухом іонів або скінченною інерцією електронів), що не позначається на поглинанні ВЧ потужності поблизу цих резонансів. Характерна ширина  $\Delta r_\delta$  основного АР дорівнює

$$\Delta r_T = (\rho_{Li}^2 a^*)^{1/3} \rightarrow \Delta r_\delta \sim [\delta^4 a^* / (k_z^2 k_b^2)]^{1/5} \propto \delta^{4/5}.$$

2. Встановлено, що величина ВЧ потужності, яка поглинається поблизу АР, коли в ньому спостерігається мінімум (максимум) на радіальному профілі густини, є в  $(a/\rho_{Li})^{1/2}$  разів більшою порівняно до випадку лінійного профілю густини. Це зростання пояснюється збільшенням ширини АР в  $(a/\rho_{Li})^{1/6}$  разів та збільшен-

ням характерної величини амплітуд полів АХ в області АР у  $(a/\rho_{Li})^{2/15}$  разів. Тут  $a$  - характерний радіальний розмір неоднорідності густини і  $\rho_{Li}$  - ларморівський радіус іонів. Доведено, що поблизу максимуму (мінімуму), в тому числі - скінченної висоти (глибини), на профілі густини плазми між двома АР можуть бути локалізовані дрібномасштабні АХ, обумовлені тепловим рухом іонів або скінченною інерцією електронів. Їхні власні частоти перевищують частоту альфвенівського континуума для кінетичних АХ і виявляються меншою за неї для інерціальних АХ.

3. Доведено можливість поширення АПХ у замагніченій плазмі, що частково заповнює циліндричний хвилевід. Установлено, що у хвилеводах із вузьким діелектричним прошарком (коли вплив параметрів плазми на дисперсійні властивості АПХ є найсильнішим) і тонкою плазмовою вставкою ці хвилі поширюються тільки в напрямку циклотронного обертання іонів, і їхня частота може бути порядку іонної циклотронної.

4. Узагальнено теорію поширення АПХ на випадок ХПТ із довільним значенням азимутального номера моди  $m$  і малим значенням аксіального хвильового числа, а також на випадок хвилеводів з малою тороїдністю. Встановлено, що власна частота ХПТ із малим значенням аксіального хвильового числа є нижчою за частоту АПХ, якщо діелектрична проникність шару, що відокремлює вільну плазму від металевої стінки хвилеводу, не занадто близька до одиниці. Доведено, що перенесення енергії ХПТ уздовж осі хвилеводу практично дорівнює нулю в значному діапазоні аксіальних хвильових чисел, якщо діелектрична проникність шару слабо відрізняється від одиниці.

5. Поправка до власної частоти ХПТ, що обумовлена врахуванням малого аксіального числа  $k_z$ , у загальному випадку є квадратичною за  $k_z$ . Визначено можливість резонансної взаємодії незвичайної ХПТ і звичайної об'ємної хвилі за умов, якщо металевий хвилевід, що є повністю заповненим плазмою, не надто тонкий і зовнішнє магнітне не надто слабе,

$$\sqrt{b-a} = |\omega_{ce}| \sqrt{a} / (2\sqrt{m} \omega_{pe}) .$$

При цьому поправка до власної частоти ХПТ є більшою, а саме - лінійною за  $k_z$ .

6. Теоретично доведено можливість поширення ХПТ поперек сталого аксіального магнітного поля у круглому циліндричному хвилеводі, дві половини якого ( $0 < \varphi < \pi$ ) і ( $-\pi < \varphi < 0$ ) заповнено різними  $n$ -напівпровідниками, а також у металевих хвилеводах майже прямокутного перерізу, які повністю заповнені одним або двома шарами  $n$  – напівпровідників. Встановлено, що поправки до власних частот другого порядку малості обумовлені двома факторами: відхиленням форми перерізу хвилеводу від кола, а також відмінністю діелектричних властивостей напівпровідникових шарів. Останній фактор сильніше виявляється у випадку шарів різної товщини.

7. Побудовано теорію підтримання газового розряду АПХ у металевих циліндричних розрядних камерах з діелектричним покриттям без використання магнітного поля.

Автор вважає за приємний обов'язок висловити щире подяку науковому консультанту доктору фізико – математичних наук, професору Лапшину В.І. за підтримку та увагу до роботи. Автор також сердечно вдячний члену – кореспонденту НАН України, професору Степанову К.М., під керівництвом якого було розпочато дослідження впливу періодичної просторової неоднорідності плазми на властивості магнітогідродинамічних хвиль, написано кандидатську дисертацію, у співавторстві з яким або внаслідок дискусій з яким було розв'язано значну частину задач, які увійшли до дисертації. Автор також вдячний доценту Гірці В.О., у співавторстві з яким виконано значну частину досліджень властивостей хвиль поверхневого типу, професору Єгоренкову В.Д., кандидатам фізико – математичних наук Золотухіну О.В., Павленку І.В., Касілову С.В., Дьякову В.Є., а також доктору Schneider R.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лонгинов А.В., Степанов К.Н. Высокочастотный нагрев плазмы в токамаках в области ионных циклотронных частот // В кн.: Высокочастотный нагрев плазмы. – Горький: ИПФ АН СССР, 1983. – с. 152 - 210.
2. Елфимов А.Г., Киров А.Г., Сидоров В.П. Альфвеновский нагрев плазмы и генерация токов увлечения // Там же. – с. 211 - 252.
3. Голант В.Е., Фёдоров В.И. Высокочастотные методы нагрева плазмы в тороидальных термоядерных установках. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 197 с.
4. Колесниченко Я.И., Параил В.В., Переверзев Г.В. Генерация безындукционного тока в токамаке// В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 17. М.: Энергоатомиздат, 1989. с. 3 - 156.
5. Кадомцев Б.Б., Смирнов С.А. Очерк предыстории и развития основных направлений термоядерных исследований // Вопросы истории естествознания и техники. – 1981. - т.1. с. 35 - 46.
6. Spitzer L. The stellarator concept // Physics of Fluids. – 1958. – v. 1, № 1. p.253-264.
7. Alfven H. Existence of electromagnetic – hydrodynamic waves// Nature. – 1942. – v. 150, № 3805. – p. 405 – 406.
8. Allen T.K., Baker W.R., Pyle R.V., Wilcox J.M. Experimental generation of plasma Alfven waves// Physical Review Letters. – 1959. – v. 2, № 9. – p. 383 – 384.
9. Paoloni F.J. Boundary effects on  $m=0, \pm 1$  Alfven waves in a cylindrical, collisionless plasma // Physics of Fluids. – 1975. – v.18, № 6. – p.640-644.
10. Equipe TFR, presented Cano R. Experiments on magnetosonic wave excitation in toroidal plasma // 3<sup>rd</sup> Symposium on plasma heating in toroidal devices. Varenna, Italy, Sep.6-17 (lectures and contributed papers).– 1976.– p.43-49.
11. Messiaen A.M., Weynants R.R., Bhatnagar V.P. et al. Coupling of RF energy in toroidal devices by means of magnetoacoustic resonances // Proc. of the Joint Varenna-Grenoble International Symposium on heating in toroidal plasmas. Grenoble, July 3-7. – 1978. – v.2. – p.229-240.
12. Стикс Т.Х. Теория плазменных волн. – М.: Атомиздат, 1965.– 344 с.
13. Longinov A.V., Stepanov K.N., Tsurikov V.A. Fast magnetosonic wave excitation

in large tokamak plasmas// Proceedings of 7-th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Innsbruck, 1978. Nuclear Fusion Supplement. - 1979. - v.2. - p.583 - 605.

14. Kittel C. Introduction to Solid State Physics. Chapter 7: Energy Bands. – John Wiley & Sons, Inc., 1992. – p. 175.

15. Kieras C.E., Tataronis J.A. The shear Alfvén continuum in the low beta limit// Physics of Fluids. – 1982. – v. 25, № 7. – p. 1228 – 1230.

16. Bernardin M.P., Tataronis J.A. Investigation of the shear Alfvén continuum in nonaxisymmetric toroidal geometry in the low beta limit// Physics of Fluids. – 1984. – v. 27, № 1. – p. 133 – 136.

17. Блехер П.М. О собственных альфвеновских колебаниях неоднородной плазмы// Физика плазмы. – 1985. – т. 11, № 4. – с. 439 – 445.

18. Dewar R.L., Grimm R.C., Johnson J.L. et al. Long-wavelength kink instabilities in low-pressure, uniform axial current, cylindrical plasmas with elliptic cross sections// Physics of Fluids. – 1974. – v. 17, № 5. – p. 930 – 938.

19. Betti R., Freidberg J.P. Ellipticity induced Alfvén eigenmodes// Physics of Fluids B. – 1991. – v. 3, № 8. – p.1865 – 1870.

20. Betti R., Freidberg J.P. Stability of Alfvén gap modes in burning plasmas// Physics of Fluids B. – 1992. – v. 4, № 6. – p.1465 – 1474.

21. Гирка И.А., Степанов К.Н. Влияние тороидальности и эллиптичности плазменного шнура на спектры МГД волн// Украинский физический журнал. – 1991. – т. 36, № 7. – с. 1051 - 1058.

22. Елфимов А.Г. Влияние тороидальности плазмы на локальный альфвеновский резонанс // Физика плазмы. – 1988. – т. 14, в. 7. – с. 835 - 839.

23. Cheng C.Z., Chance M.S. Low –  $n$  shear Alfvén spectra in axisymmetric toroidal plasmas// Physics of Fluids. – 1986. – v. 29, № 11. – p.3695 – 3701.

24. Wong K.L., Durst R., Fonck R.J. et al. Investigation of global Alfvén instabilities in the Tokamak Fusion Test Reactor// Physics of Fluids B. – 1992. – v. 4, № 7. – p. 2122 – 2126.

25. Turnbull A.D., Strait E.J., Heidbrink W.W. et al. Global Alfvén modes: theory and

experiment// Phys. Fluids B. – 1993. – v. 5, № 7. – p. 2546 – 2553.

26. Kletzing C.A., Bounds S.R., Martin – Hiner J., Gekelman W., Mitchell C. Measurements of the shear Alfvén wave dispersion for finite perpendicular wave number// Physical Review Letters. – 2003. – v. 90, № 3. – p. 035004-1 – 035004-4.

27. Кадомцев Б. Б. Магнитные ловушки с «гофрированным» полем// В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. - М.: Изд-во АН СССР, 1958. - т. 3. - с. 285 - 299.

28. Рютов Д. Д. Открытые ловушки// Успехи Физических Наук. - 1988. - т.154, вып. 4. - с. 565 - 614.

29. Baity F. W., Berry L. A., Bighel L. et al. Plasma properties and ion heating in EBT-S and hot electron rings at TRW // Proceedings of 9th Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Baltimore, September 1 – 8, 1982. - 1983. - v. 2. - p. 185 - 196.

30. Fujiwara M., Kamimura R., Hosokawa M. et al. Experimental and numerical studies on plasma confinement in Nagoya Bumpy Torus (NBT)// Ibid. - p. 197 - 207.

31. Beidler C.D., Kolesnichenko Ya.I., Marchenko V.S. et al. Stochastic diffusion of energetic ions in optimized stellarators// Physics of Plasmas. –2001. – v.8, № 6. – p. 2731 - 2737.

32. Гирка И.А., Степанов К.Н. МГД колебания плазмы в гофрированном магнитном поле// Украинский физический журнал. - 1992. - т.37, № 1.- с.69 -75.

33. Girka I.O. How ripples of the Steady Magnetic Field in Tokamaks Influence Propagation, Conversion and Absorption of Alfvén and Fast Magnetosonic Waves// Preprint of Max-Planck-Institut fuer Plasmaphysik, 85748 Garching bei Muenchen, FRG. IPP 4/274. – 1996. – 15 p.

34. Гирка И.А. МГД колебания плазменного тора эллиптического сечения в гофрированном магнитном поле// Тезисы докладов конференции "Взаимодействие электромагнитных излучений с плазмой", Душанбе. - 1991. - с.146.

35. Girka I.A., Lapshin V.I., Stepanov K.N. Effect of the periodic axial plasma inhomogeneity on propagation, conversion and absorption of Alfvén and fast magnetosonic waves in fusion devices// International Symposium Plasma '97, "Research

- and Applications of Plasmas". Invited Papers. - Opole, Poland. - 1997. - v. 2. - p. 19 - 26.
36. Kolesnichenko YA.I., Lutsenko V.V., Wobig H. et al. Alfven eigenmodes in Helias configurations (Part 1) // Preprint MPIPP 3/261. – May 2000. – 65 p.
37. Kolesnichenko Ya.I., Lutsenko V.V., Wobig H. et al. Alfven continuum and high – frequency eigenmodes in optimized stellarators// Physics of Plasmas. – 2001. – v.8, № 2. – p. 491 – 509.
38. Kolesnichenko Ya.I., Wobig H., Yakovenko Yu.V. Alfven continuum in stellarators: general analysis and specific examples// International Workshop “Innovative concepts and theory of stellaartors”. Abstracts. – Kyiv, Ukraine. – 2001. - p. 7.
39. Kolesnichenko Ya.I., Wobig H., Yakovenko Yu.V., Kisslinger J. Alfven continuum in stellarators: general analysis and specific examples// Scientific Papers of the Institute for Nuclear Research. – 2001. - № 4 . - p. 69 – 75.
40. Vaclavik J., Appert K. Theory of plasma heating by low frequency waves: magnetic pumping and Alfven resonance heating //Nuclear Fusion. –1991. – v. 31, № 10. - p. 1945 - 1997.
41. Bellan P.M. Alfven resonance reconsidered: Exact equations for wave propagation across a cold inhomogeneous plasma// Physics of Plasmas. – 1994. - v. 1, № 11. - p. 3523- 3541.
42. Моисеенко В.Е. Локальный альфвеновский резонанс в осесимметричных тороидальных системах // Физика плазмы. – 1986. - т. 2, в. 11. - с. 1376 - 1378.
43. Долгополов В.В., Крюков А.В., Романов С.С. О локальном альфвеновском резонансе в тороидальной плазме // Украинский физический журнал. – 1986. - т. 31, № 2. - с. 210 - 217.
44. Cross R. An Introduction to Alfven Waves. – The Adam Hilger Series on Plasma Physics, 1988. – 220 p.
45. Moiseenko V.E., Tennfors E. Localized global ICRF eigenmodes and conversion zones in two-ion species tokamak // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 1996. – v. 38. - p. 2133 - 2142.

46. Лапшин В.И., Степанов К.Н., Штрассер В.О. Возбуждение нелинейной кинетической волны в области локального альфвеновского резонанса // Физика плазмы. – 1992. - т.18, в.5. - с.660 - 663.
47. Гильденбург В.Б. О нелинейных эффектах в неоднородной плазме// ЖЭТФ. - 1964. - т. 46, № 6. - с. 2156 - 2163.
48. Голант В.Е., Пилия А.Д. Линейная трансформация и поглощение волн в плазме// УФН. - 1971. - т.104, № 3. - с.413 - 457.
49. Литвак А.Г. Динамика нелинейных электромагнитных явлений в плазме// В сб. Вопросы теории плазмы. Вып.10. М.: Атомиздат, 1980. - с.164 - 242.
50. Стикс Т., Свансон Д. Распространение и трансформация волн в неоднородной плазме// В сб. Основы физики плазмы. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - т.1. - с.333 - 364.
51. Гордиенко И.Я., Долгополов В.В., Романов С.С. Влияние вращения плазмы на локальный альфвеновский резонанс// Украинский физический журнал. – 1987. - т. 32, № 6. - с. 868 - 872.
52. Moiseenko V.E. A fast wave antenna for ICRF plasma heating// Transactions of Fusion Technology. – 2001. – v. 39. – p. 65 – 72.
53. Долгополов В.В., Степанов К.Н. О Черенковском поглощении альфвеновской и быстрой магнитозвуковой волн в неоднородной плазме// Ядерный Синтез. - 1965. - т. 5, № 4. - с. 276 - 278.
54. Lapshin V.I., Stepanov K.N., Fedutenko E.A. Singularities of the local MHD – resonances in solar chromosphere plasma// Proceedings of the Joint Varenna-Abastumani International School & Workshop on Plasma Astrophysics. Varenna, Italy. - 1988. - ESA SP-285, v. 1. - p. 111 - 114.
55. Girka I.O., Kasilov S.V., Lapshin V.I., Stepanov K.N. Enhancement of RF power absorption within the local Alfven resonance when the density profile differs from the linear one (maximum or inflection point)// Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. NSC "Kharkov Institute of Physics & Technology". Kharkov - 1999. - No. 1,2. - p. 148 - 150.
56. Mahajan S.M. Kinetic theory of shear Alfven waves// Physics of Fluids. - 1984. - v.

27, № 9. - p. 2238 - 2247.

57. Girka I.O., Rutkevich P.P. Small scale Alfven waves in the region of maximum (minimum) at the density radial profile between two local Alfven resonances// Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія фізична “Ядра, частинки, поля”. - 2001. - № 529, випуск 3 . - с.43 - 46.

58. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.3. Квантовая механика. 4-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 768 с.

59. Rosenbluth M.N., Rutherford P.H. Excitation of Alfven waves by high – energy ions in a tokamak// Physical Review Letters. – 1975. – v.34, № 23. – p. 1428 – 1431.

60. Berk H.L., Horton W., Rosenbluth M.N., Rutherford P.H. Microinstability theory of two – energy – component toroidal systems// Nuclear Fusion. – 1975. – v. 15. – p. 819 – 844.

61. Kolesnichenko Ya.I. The role of alpha particles in tokamak reactors// Nuclear fusion. – 1980. – v. 20, № 6. – p. 727 – 780.

62. Yang Ming Li, Mahajan S.M., Ross D.W. Destabilization of global Alfven eigenmodes and kinetic Alfven waves by alpha particles in a tokamak plasma// Physics of Fluids. – 1987. – v. 30, № 5. – p. 1466 – 1484.

63. Fu G.Y., Van Dam J.W. Stability of the global Alfven eigenmode in the presence of fusion alpha particles in an ignited tokamak plasma// Physics of Fluids B. – 1989. – v. 1, № 12. – p. 2404 – 2413.

64. Toi K., Yamamoto S., Takeshi M. et al. CHS and LHD experimental groups. Impact of energetic ion driven global modes on toroidal plasma confinements// Journal of Plasma Fusion Research. SERIES. – 2002. – v. 5. – p. 50 – 56.

65. Yegorenkov V.D., Stepanov K.N. Natural Alfven and fast magnetosonic waves in an axisymmetrical low  $\beta$  plasma torus of large dimensions// 1994 International Conference on Plasma Physics. Contributed Papers. Foz do Iguacu, Brazil. – 1994. - v. 2. - p. 187 - 190.

66. Дьяков В.Е., Егоренков В.Д., Степанов К.Н. Собственные альфвеновские и быстрые магнитозвуковые волны в осесимметричном плазменном торе больших размеров малого давления// Материалы 2-й конференции “Физические явления в

твёрдых телах”. Харьков. – 1995. - с. 26.

67. Girka I.O., D'yakov V.Ye., Yegorenkov V.D., Stepanov K.N. Magnetohydrodynamic wave spectra in large tokamaks with noncircular cross section of magnetic surfaces// Problems of Atomic Science and Technology. NSC «Kharkov Institute of Physics and Technology». - 2000. - No.6. Series: Plasma Physics. - p. 60 - 61.
68. Кондратенко А.Н. Плазменные волноводы. - М.: Атомиздат, 1976. - 232 с.
69. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Колебания и волны в плазменных средах. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 271 с.
70. Файнберг Я.Б., Блиох Ю.П., Корнилов Е.А. и др. Электродинамика гибридных плазменно-волноводных замедляющих структур// Препринт ХФТИ НАНУ. - 1990. № 49. – 6 с.
71. Aliev Yu.M., Maximov A.V., Kortshagen U., Schluter H., Shivarova A. Modeling of microwave discharges in the presence of plasma resonances// Physical Reviews. E. - 1995. - v. 51, № 6. - p. 6091 - 6102.
72. Ballico M.J., Gross R.C. Probe measurements of ICRF surface waves in the torus tokamak// Fusion Engineering and Design. - 1990. - v. 12, № 1, 2. - p. 197 - 201.
73. Кузелев М.В., Романов Р.В., Селиванов И.А. и др. Спектры собственных колебаний коаксиального плазменного волновода в конечном магнитном поле// Труды ИОФАН. - 1994. - т. 45. - с. 17 - 38.
74. Азаренков Н.А., Клепиков В.Ф., Олефир В.П., Споров А.Е. Несимметричные электромагнитные волны в слабонеоднородной магнитоактивной плазме, частично заполняющей металлический волновод// Вісник Харківського університету. Серія фізична “Ядра, частинки, поля”. – 2000, вип. 1 . - с.41 - 44.
75. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. - М.: Высшая школа, 1988. – 424 с.
76. Кузелев М.В., Романов Р.В., Рухадзе А.А. Электромагнитные волны в плазменных волноводах. Часть 1// Прикладная физика. – 2001. - № 2. – с. 111 – 133.
77. Кузелев М.В., Романов Р.В., Рухадзе А.А. Электромагнитные волны в плазменных волноводах. Часть 2// Прикладная физика. – 2001. - № 3. – с. 103 – 129.
78. Кузелев М.В., Романов Р.В., Рухадзе А.А. Электромагнитные волны в плаз-

менных волноводах. Часть 3. Эффективные граничные условия и теория поверхностных волн в волноводах с тонкой трубчатой плазмой// Прикладная физика. – 2003. - № 3. – с. 20 – 42.

79. Курушин Е.П., Нефедов Е.И. Электродинамика анизотропных волноводных структур. - М.: Наука, 1983. - 222 с.

80. Белецкий Н.Н., Булгаков А.А., Ханкина С.И., Яковенко В.М. Плазменные неустойчивости и нелинейные явления в полупроводниках. - Киев: Наукова думка, 1984. – 192 с.

81. Білецький М.М., Яковенко В.М. Поверхневі магнітоплазмові хвилі у напівпровідникових структурах// Український фізичний журнал. - 1998. - т. 48, № 11. - с. 1416 – 1424.

82. Surface Waves in Plasmas and Solids/ Ed. by S.Vukovic. - Singapore: World Scientific, 1986. - 842 p.

83. Бразис Р.С. Активные и нелинейные взаимодействия при возбуждении поларитонов плазменного типа в полупроводниках// Лит. физ. сборник. – 1981. – т. 21, № 4. – с. 73 - 117.

84. Microwave discharges: Fundamentals and Applications, ed. by Ferreira C.M. and Moisan M. - 1993. - v.302 of NATO Advanced Study Institute, Series B: Physics. (New York: Plenum)

85. Girka V.O., Girka I.O., Pavlenko I.V. Electrodynamic model of the gas discharge sustained by azimuthal surface waves// Contributions to Plasma Physics. - 2001. - v. 41. № 4. - p. 393 - 406.

86. Zhelyazkov I., Atanasov V. Axial structure of low – pressure high – frequency discharges sustained by traveling electromagnetic surface waves// Physics Reports. - 1995. - v. 255. - p. 79 - 201.

87. Margot - Chaker J., Moisan M., Chaker M. et al. plasma source sustained by nonsymmetrical surface wave// Journal of Applied Physics. - 1989. - v. 66, № 9. - p. 4134 - 4148.

88. Winter R., Korzec D., Engemann J. Large area plasma cleaning with 26'' microwave slot antenna plasma source SLAN II// Surface Coating Technologies. -



1997. - v. 93. - p. 134 – 141.

89. Azarenkov N.A., Olefir V.P., Sporov A.E. Quadrupole and octopole electromagnetic waves in slightly non – uniform magnetized plasma column // *Physica Scripta*. - 2001. - v.63. p. 36 - 42.

90. Гирка В.А., Гирка И.А., Кондратенко А.Н., Ткаченко В.И. Азимутальные поверхностные моды магнитоактивных плазменных волноводов// *Радиотехника и электроника*. - 1988. - т. 33, № 5. - с. 1031 - 1035.

91. Гирка В.А., Гирка И.А. Связанные азимутальные поверхностные волны в неоднородном плазменном цилиндре с током// *Радиотехника и электроника*. – 1991. - т. 36, № 10. - с. 1997 - 2004.

92. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н., Остриков К.Н. Поверхностные волны в структурах плазма - металл// *Изв. вузов. Радиофизика*. - 1993. - т. 36, № 5. - с. 335 - 389.

93. Гирка В.А., Гирка И.А., Ткаченко В.И. Возбуждение азимутальных поверхностных мод в цилиндрических полупроводниковых структурах при наличии дрейфового движения потока электронов // *Журнал технической физики*. - 1996. - т. 66, вып. 4. - с. 114 - 120.

94. Girka V.A., Kondratenko A.M., Tkachenko V.I. Azimuthal surface modes of the magnetoactive plasma waveguides// *Proceedings of the 7-th International Conference on Plasma Theory*. – Kyiv. Ukraine. – 1987. – p. 143 – 144.

95. Гирка В.А., Гирка И.А., Олефир В.П., Ткаченко В.И. Генерация электромагнитных волн кольцевыми РЭП// *Письма в ЖТФ*. - 1991. - т. 17, вып. 1. - с. 87 - 91.

96. Nagatsu M., Ghanashev I., Sugai H. Production and control of large diameter surface wave plasmas// *Plasma Sources Science and Technology*. - 1998. - v. 7. - p. 230 - 237.

97. Nonaka S. Very long and large - area RF plasma production by odd surface waves for online mass production of amorphous silicon solar cells or mirrors// *Japanese Journal of Applied Physics*. - 1994. - v. 63. - p. 4226 - 4231.

98. Azarenkov N.A., Bizyukov A.A., Grekov D.L., Olefir V.P. To the influence of the confining magnetic field on the high frequency field pattern in PR-1 machine //

International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta (Crimea), Ukraine. Book of Abstracts. - 2002. - p.175.

99. Греков Д.Л., Азаренков Н.А., Бизюков А.А., Олефир В.П. Особенности распределения электромагнитных полей в замагниченной плазме установки ПР-1 // Вопросы атомной науки и техники, сер. Термоядерный синтез, Москва. - 2002. - Вып. 3 - 4. - с. 186 - 191.

100. Азаренков Н.А., Бизюков А.А., Гапон А.В., Целуйко А.Ф., Чунадра А.Г. Плазменный реактор на поверхностных волнах // Материалы VIII научно-технической конференции с участием зарубежных специалистов «Вакуумная наука и техника - 2001», Судак (Крым). - 2001. - с. 167 - 171.

101. Azarenkov N.A., Bizyukov A.A., Gapon A.V., Kashaba A.Y., Tseluyko A.Ph., Yunakov N.N. Large - area surface wave plasma source // International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta (Crimea), Ukraine. Book of Abstracts. - 2002. - p. 161.

102. Azarenkov N.A., Bizyukov A.A., Grekov D.L., OlefirV.P. The optimized antenna for plasma production in the PR-1 device // International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta (Crimea), Ukraine. Book of Abstracts. - 2002. - p. 175.

103. Греков Д.Л., Азаренков Н.А., Бизюков А.А., Олефир В.П. Оптимизированная антенна для создания плазмы в установке ПР-1 // Радиофизика и электроника. - 2002. - т. 7, № 3. - с. 321 - 326.

104. Греков Д.Л., Азаренков Н.А., Бизюков А.А., Олефир В.П. Распределение электромагнитных полей в установке ПР-1// Радиофизика и радиоастрономия. — 2002. — т. 7, №3. - с. 286 - 290.

105. Азаренков Н.А., Бизюков А.А., Гапон А.В., Греков Д.Л., Целуйко А.Ф., Чунадра А.Г. Плазменный источник на поверхностных волнах // Прикладная физика. — 2002. - № 5. - с. 36 - 42.

106. Azarenkov N.A., Bizyukov A.A., Gapon A.V., Kashaba A.Y., Tseluyko A.Ph., Yunakov N.N. Large - area surface wave plasma source // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. - 2002. - №5. - p. 118 - 120.

107. Azarenkov N.A., Bizyukov A.A., Kashaba A.Y., Sereda K.N., Tarasov I.K. Wide - aperture plasma source on surface waves for deposition and etching of coatings // Eight International Conference on Plasma Surface Engineering. Conference and Exhibition. Organized by the European Joint Committee on Plasma and Ion Surface Engineering (EJC/PISE). Abstracts, MoPGE3. - Garmisch – Partenkirchen. - 2002. - p. 188.
108. Гирка В.А., Гирка И.А., Кондратенко А.Н., Ткаченко В.И. Азимутальные поверхностные моды изотропных плазменных волноводов// Радиотехника и электроника. - 1989. - т.34, № 7. с. 1527 - 1529.
109. Гирка В.А., Гирка И.А. Азимутальные поверхностные волны в неоднородном плазменном цилиндре// Изв.вузов. Радиофизика. - 1991. - т .34, № 4. - с. 386 - 391.
110. Kuzelev M.V., Romanov R.V., Rukhadze A.A. Effect of the radial plasma profile on the surface wave structure in a plasma waveguide// Plasma Physics Reports. - 2001. - v. 27, № 3. - p. 243 - 250.
111. Богданкевич Л.С., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Теория возбуждения гофрированных плазменных резонаторов релятивистскими электронными пучками// Журнал технической физики. - 1980.- т. 50, в. 2. – с. 233 - 240.
112. Дмитрук Н.Н., Литовченко В.Г., Стрижевский В.Л. Поверхностные поляритоны в полупроводниках и диэлектриках. – К.: Наукова думка, 1989. - 376 с.
113. Ерохин Н.С., Кузелев М.В., Моисеев С.С., Рухадзе А.А., Шварцбург А.Б. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. – М.: Наука, 1982. - 297 с.
114. Левицкий С.М., Кошечая С.В. Вакуумная и твердотельная электроника СВЧ. – К.: Вища школа, 1986. - 272 с.
115. Кондратенко А.Н. Объемные и поверхностные волны в ограниченной плазме. - М.: Энергоатомиздат, 1985. – 208 с.
116. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н., Костенко В.В. Поверхностные волны в структурах плазма-металл// У зб.: Взаимодействие и самовоздействие волн в нелинейных средах. Ч.1. – Душанбе: Дониш, 1988. – с. 214 - 231.
117. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н. Поверхностные волны в гиротропных плазменных слоях, ограниченных металлом// Радиотехника и электроника. – 1989.

– т. 34, в. 7. – с. 1525 - 1527.

118. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н., Остриков К.Н. Резонансная генерация второй гармоники поверхностной волны на границе плазма - металл// Изв. вузов. Радиофизика. – 1991. – т. 34, № 4. – с. 672 - 681.

119. Azarenkov N.A., Ostrikov K.N. Surface magnetoplasma waves at the interface between a plasma-like medium and a metal in a Voigt geometry// Physics Reports. – 1999. – v. 308. - p.333 - 428.

120. Гирка В.А., Гирка И.А., Кондратенко А.Н., Ткаченко В.И. Азимутальные поверхностные волны на границе магнитоактивной плазмы с металлом// Радиотехника и электроника. - 1989. - т.34, № 2. с. 296 - 299.

121. Toda M. Propagation in a solid state plasma waveguide in a transverse magnetic field// Journal of Physical Society of Japan. – 1964. – v. 19, № 7. – p. 1126 – 1130.

122. Zaginaylov G.I., Hirata A., Ueda T., Shiozawa T. Full – wave modal analysis of the rectangular waveguide grating// IEEE Transactions on Plasma Science. – 2000. – v. 28, № 3. – p. 614 – 620.

123. Nakajima N., Cheng C.Z., Okamoto M. High –  $n$  helicity – induced shear Alfvén eigenmodes// Physics of Fluids B. – 1992. – v. 4, № 5. – p.1115 - 1121.

124. Weller A., Spong D.A., Jaenicke R. et al. Neutral beam driven global Alfvén eigenmodes in the Wendelstein W7-AS stellarator// Physical Review Letters. – 1994. – v. 72, № 8. – p. 1220 - 1223.

125. Weller A., Anton M., Geiger J. et al. Survey of magnetohydrodynamic instabilities in the advanced stellarator Wendelstein 7-AS// Physics of Plasmas. - 2001. – v. 8, № 3. – p.931-956.

126. Nuehrenberg C. Computational ideal MHD: Alfvén, sound and fast *global* modes in W7-AS// Plasma Physics and Controlled Fusion. – 1999. – v. 41. – p. 1055 – 1070.

127. Motojima O., Shishkin A.A. Drift island motion in helical plasma and its use for ash removal and high – energy ion injection// Plasma Physics and Controlled Fusion. – 1999. – v. 41. – p. 227 – 242.

128. Tataronis J., Grossman W. Decay of MHD Waves by Phase Mixing. I. The Sheet-Pinch in Plane Geometry// Zeitschrift fuer Physik. – 1973. - v. 261. - p. 203 - 216.

129. Tataronis J., Grossman W. Decay of MHD Waves by Phase Mixing. II. The Theta-Pinch in Cylindrical Geometry// *Zeitschrift fuer Physik*. – 1973. – v. 261. – p. 217 - 236.
130. Uberoi C. Alfven waves in inhomogeneous magnetic fields// *Phys. Fluids*. – 1972. – v. 15. – p. 1673 - 1675.
131. Chen L., Hasegawa A. Plasma heating by spatial resonance of Alfven wave// *Physics of Fluids*. – 1974. – v. 17. – p. 1399 - 1403.
132. Tataronis J.A. Energy absorption in the continuous spectrum of ideal MHD// *Journal of Plasma Physics*. - 1975. - v. 13. - p.87 - 92.
133. Тимофеев А.В. Резонансные эффекты в колебаниях неоднородных течений сплошных сред// В сб. Вопросы теории плазмы. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - Вып.17. - с.157 - 244.
134. Hasegawa A., Chen L. Kinetic processes in plasma heating by resonant mode conversion of Alfven wave// *Physics of Fluids*. – 1976. – v. 19, № 12. – p. 1924 - 1934.
135. Appert K., Gruber R., Troyon F. and Vaclavik J. Excitation of global eigenmodes of the Alfven wave in tokamaks// *Plasma Physics*. – 1982. – v.24, № 9. – p. 1147 – 1159.
136. Bernardin M.P., Tataronis J.A. Magnetohydrodynamical equilibrium and the shear Alfven continuum in nonaxisymmetric toroidal geometry// *Physical Review Letters*. – 1985. – v.54, № 21. – p. 2332 – 2335.
137. Греков Д.Л., Дикий И.А., Калиниченко С.С. и др. Исследование структуры локального альфвеновского резонанса и поглощения альфвеновских волн в тороидальной плазме// Препринт ХФТИ 85-14.- М.: ЦНИИАтоминформ, 1985. - 28 с.
138. Schvets O.M., Dikiy I.A., Kalinichenko S.S. et al. Absorption of Alfven waves and plasma production in the Omega and Uragan – 3 devices// *Nuclear Fusion*. – 1986. – v. 26, № 1. – p. 23 – 41.
139. Volkov E.D., Adamov I.Yu., Arsen'ev A.V. et al. Confinement of RF heated plasma in the Uragan – 3M torsatron// 14<sup>th</sup> Intern. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Wuerzburg. - 1992. - v. 2. - p. 679 – 688.
140. Besedin N.T., Kasilov S.V., Pankratov I.M. et al. Numerical simulation of particle and energy transport in Uragan – 3M torsatron// IAEA Technical Committee Meeting

on “Stellarators and other helical confinement systems”. Garching, Germany. - 1993. - p. 277 - 281.

141. Yegorenkov V.D., Stepanov K.N. Возбуждение альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн в плазме токамака пучком высокоэнергетичных ионов // Proceedings of 16-th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Contributed Papers. Venice. - 1989. - v. 3. - p.1207 - 1210.

142. Yegorenkov V.D., Polevoy A.R., Stepanov K.N., Sharapov S.F. Возможная неустойчивость глобальных альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн в ИТЭР при нейтральной инжекции // 18th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Contributed Papers. Berlin. - 1991. - Part IV, v.15C. - p. 33 - 36.

143. М.В.Кузелев, А.А.Рухадзе. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. - М.: Наука, 1990. - 336 с.

144. Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильно-точных релятивистских электронных пучков. – М.: Атомиздат, 1980. - 310 с.

145. Силин В.П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. - М.: Наука, 1973. – 288 с.

146. Гірка І.О., Золотухін О.В. Поширення електромагнітних хвиль вздовж межі гіротропної плазми з металевим хвилеводом довільного перерізу// Український фізический журнал. – 1994. - т. 39, № 6. - с. 682 - 687.

147. Гирка И.А., Лапшин В.И., Степанов К.Н. Нагрев плазмы вблизи сателлитных альфвеновских резонансов в ловушках с гофрированным магнитным полем// Физика плазмы. - 1994. - т. 20, №11. - с. 1020- 1027.

148. Гирка И.А., Золотухин А.В. Поперечные поверхностные магнитоплазменные волны в металлическом волноводе прямоугольного сечения, заполненном n- полупроводником // Радиотехника и электроника. – 1994. - т.39, № 12. - с.1961- 1968.

149. Гирка И.А., Лапшин В.И., Степанов К.Н. Нагрев плазмы вблизи сателлитных альфвеновских резонансов в стеллараторе// Физика плазмы. - 1997. - т. 23, № 1. - с. 23 -31.

150. Гирка И.А. Расщепление спектров поперечных поверхностных волн в изо-

тропном плазменном волноводе некруглого сечения// Физика плазмы. – 1997. - т. 23, № 3. - с. 246 - 251.

151. Гирка И.А. Расщепление спектров МГД колебаний и структура сателлитного альфвеновского резонанса в холодной плазме, находящейся в сильном аксиальном магнитном поле и малом поле, обладающем винтовой симметрией// Физика плазмы. – 2000. - т. 26, № 9. - с. 824 - 832.

152. Girka I.O. Resonant influence of steady magnetic field ripples on the structure of the local Alfven resonance// Contributions to Plasma Physics. – 2001. - v.41, № 1. - p. 33 - 44.

153. Гирка И.А. Поперечные поверхностные магнитоплазменные волны в металлическом волноводе прямоугольного сечения, заполненном двумя слоями полупроводников// Радиотехника и электроника. - 2001. - т. 46, № 12. - с. 1481 - 1488.

154. Гирка И.А. Азимутальные поверхностные волны на границе плазма-металл в неоднородном тороидальном магнитном поле// Журнал технической физики. - 2002. - т. 72, № 7. - с. 52 - 57.

155. Girka I.O. Fine structure of the local Alfven resonances in cold plasma placed in bumpy magnetic field// Contributions to Plasma Physics. – 2002. – v.42, № 5. - p.476 - 497.

156. Гирка В.А., Гирка И.А. Замедление поперечных поверхностных волн в изотропном плазменном волноводе некруглого сечения// Журнал технической физики. - 1997.- т. 67, в. 7. – с. 92 - 97.

157. Гирка В.А., Гирка И.А., Павленко И.В. Распространение поверхностных волн поперек оси магнитоактивного плазменного волновода некруглого сечения// Физика плазмы. – 1997. - т. 23, № 11. - с. 1037 - 1041.

158. Гирка И.А., Лапшин В.И., Степанов К.Н. Расщепление спектров МГД колебаний плазмы в гофрированном магнитном поле// Физика плазмы. - 1998. – т. 24, № 11. - с. 1015 - 1022.

159. Гирка И.А., Ковтун П.К. Азимутальные поверхностные волны в замагниченных плазменных волноводах// Журнал технической физики. – 1998. - т.68, № 12. -

с.25-28.

160. Girka I.A., Lapshin V.I. Turbulent plasma heating in satellite Alfvén resonances in devices with bumpy magnetic field// Progress in Astronautics and Aeronautics. Progress in Fluid Flow Research: Turbulence and Applied MHD. - 1998. - v. 182, № 63. - p.887 - 897.

161. Гирка И.А., Ковтун П.К. Влияние винтовой неоднородности удерживающего магнитного поля на собственные МГД колебания в прямом стеллараторе // Физика плазмы. – 2000. - т. 26, № 1. - с. 36 - 43.

162. Гирка В.А., Гирка И.А. Влияние неоднородности тороидального магнитного поля на спектры азимутальных поверхностных волн в металлических волноводах, полностью заполненных плазмой// Физика плазмы. – 2002. - т.28, № 3. - с. 215 - 220.

163. Гирка В.А., Гирка И.А. Длинноволновые несимметричные поверхностные моды изотропных плазменных волноводов// Физика плазмы. – 2002. - т. 28, № 8. - с. 739 - 747.

164. Гирка В.А., Гирка И.А. Длинноволновые несимметричные поверхностные волны в магнитоактивных цилиндрических волноводах, полностью заполненных плазмой// Физика плазмы. – 2002. - т. 28, № 11. - с. 994 - 1003.

165. Girka I.O., Lapshin V.I. Helicity resonant influence on the local Alfvén resonance structure in straight stellarators// Journal of Plasma Physics. – 2002. – v. 68, part 4. – p. 257 - 265.

166. Гирка И.А., Руткевич П.П. Мелкомасштабные Альфвеновские колебания плазмы, локализованные вблизи максимума (минимума) возмущения радиального профиля плотности// Физика плазмы. – 2003. - т. 29, № 6, - с. 501 - 507.

167. Girka I.O., Lapshin V.I., Schneider R. Resonant influence of helicity on Alfvén heating of plasma in stellarators// Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2003. – v. 45. – p. 121–132.

168. Беляев Н.Р., Гирка И.А., Грицина В.Т. Влияние аксиальной периодической неоднородности удерживающего магнитного поля на альфвеновский нагрев цилиндрической плазмы// Физика плазмы. - 2003. – т. 29, № 5. - с. 432 - 439.



169. Волков Е.Д., Супруненко В.Е., Шишкин А.А. Стелларатор. - Киев: Наукова думка, 1983. - 312 с.
170. Beidler C.D., Grieger G., Harmeyer E. et al. Helias reactor studies// Preprint MPIPP 2/330. – October 1995. – 21 p.
171. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Геометрия магнитного поля// В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М.: Энергоатомиздат, 1963. - с. 3 - 91.
172. Данилкин И.С. Влияние геометрических погрешностей магнитной системы на топологию поля стелларатора поля// В кн.: Стеллараторы. - М.: Наука, 1973. - с. 26 - 49.
173. Girka I.O., Kovtun P.K. The Influence of 3D Nonhomogeneity of External Magnetic Field on Dispersion Properties of Low-Frequency MHD Waves in Stellarator// Conf. Proceedings 1998 Intern. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Kharkov, June 2-5. - 1998. - v. 1. - p. 655 - 657.
174. Карпов С.Ю., Столяров С.Н. Распространение и преобразование волн в средах с одномерной периодичностью// Успехи физических наук. - 1993. - т. 163, № 1. - с. 63 - 88.
175. Лонгинов А.В., Цуриков В.А. Исследование распределения электромагнитного поля в плазменном цилиндре при возбуждении быстрой магнитозвуковой волны в области ионной циклотронной частоты// Физика плазмы. - 1990. - т. 16, № 1. - с. 39 - 45.
176. Гірка І.О. Розщеплення власних частот МГД коливань плазми гвинтовим магнітним полем стеларатора// 7 Українська конференція з КТС та фізики плазми. Програма, збірник анотацій. – Київ. – 1999. - с. 47.
177. Girka I.O. Influence of helical magnetic field inhomogeneity on the properties of Alfven and fast magnetosonic waves// 26 - th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Invited and Contributed Papers. – Maastricht, Netherlands. - 1999. - v. 231. - p. 1769 - 1772.
178. Мотожима О., Муратов В.І., Шишкін О.О. На шляху до термоядерної енергетики. - Харьков: Основа, 1994. - 94 с.
179. Girka I.O., Lapshin V.I., Stepanov K.N. Splitting the Eigen Frequencies of Fast

Magnetosonic and Alfven Waves with bumpy magnetic field// 23 rd European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. - Contributed Papers, Part 2. - Editors: D.Gresillon, A.Sitenko, A.Zagorodny. - Kiev, Ukraine, June. - 1996. – p. 898 -901.

180. Girka I.A., Lapshin V.I., Stepanov K.N. Alfven Wave Heating of Plasma in Additional Alfven Resonances in Stellarators// 22nd European Phys. Society Conf. on Contr.Fusion and Plasma Physics. Contr. Papers. - Bournemouth, UK. - 1995. - Part 4. - p. 4-357 – 4-360.

181. Гірка І.О. Структура сателітних алфвенівських резонансів у периферійній плазмі стеларатора// 7 Українська конференція з КТС та фізики плазми. Програма, збірник анотацій. – Київ. – 1999. - с. 70.

182. Beidler C., Grieger G., Herrnegger F. et al. Physics and engineering design for Wendelstein VII - X// Fusion Technology. - 1990. - v. 17, № 1. - p.148 - 168.

183. Descamps P., Delvigne T., Durodie F. et al. Evidence of global mode excitation in the TEXTOR tokamak// Proceedings of 16th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Contributed Papers. - Venice, Italy. - 1988. - Part 3. - p. 1053 - 1056.

184. Ахиезер А.И., Лапшин В.И., Степанов К.Н. К теории затухания магнитогидродинамических волн в высокотемпературной плазме// Журнал экспериментальной и теоретической физики. - 1976. - т. 70, № 1. - с. 81 – 91.

185. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. - М.: Наука, 1974. – 720 с.

186. Греков Д.Л., Степанов К.Н., Татаронис Дж.А. Возбуждение аксиально – несимметричных волн в плазме при наличии локального альфвеновского резонанса// Физика плазмы. - 1981. - т. 7, № 4. - с. 752 - 763.

187. Гирка И.А., Степанов К.Н. Поглощение и конверсия длинноволновых БМЗВ в области локального резонанса в периферийной плазме //Украинский физический журнал. - 1990. - т. 35, № 11. - с. 1680 - 1688.

188. Girka I.O., Schneider R. Effect of helical inhomogeneity of the confining magnetic field on the Alfven wave heating// 14<sup>th</sup> International Stelalartor Workshop. Conference

Programme. – Greifswald, Germany. – 2003. – P.Tu.22.

189. Гирка И.А., Степанов К.Н. О влиянии азимутального магнитного поля на спектры магнитозвуковых колебаний плазменного цилиндра // Доклады АН УССР. – 1990. – серия А, № 3, с.66 - 71.

190. Girka I.O., Lapshin V.I. Fine structures of the local Alfven resonances in a cold helically nonuniform plasma of a straight stellarator// 27 European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Abstracts of Invited and Contributed Papers. - Budapest, Hungary. - 2000. - p. 86.

191. Girka I.O., Lapshin V.I. Helicity resonant influence on the local Alfven resonance structure in straight stellarators// International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion. Book of Abstracts. - Alushta, Ukraine. - 2002. p. 42.

192. Давыдова Т.А., Лашкин В.М. Модуляционная неустойчивость и возникновение солитонов при ион – ионном резонансе// Физика плазмы. - 1990. - т. 16, № 8. - с.907 - 915.

193. Milenko V.P., Sidorov V.P., Tsypin V.S. Nonlinear transformation of Alfven waves in a hot plasma// Contributed Papers of the 17<sup>th</sup> EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Heating. – Amsterdam. – 1990. – v. 14B, Part 3. – p. 1145 – 1148.

194. Klima R. The drifts and hydrodynamics of particles in a field with a high – frequency component// Czechoslovak Journal of Physics. - 1968. - v. B18. - p. 1280 - 1291.

195. Noterdaeme J.-M. Ion cyclotron resonance frequency heating on ASDEX Upgrade: an overview// Problems of Atomic Science and Technology. – 1998. – Series: Plasma Physics, issues 1, 2. – p. 65 – 69.

196. Гирка И.А., Степанов К.Н. Собственные магнитозвуковые колебания неоднородного плазменного цилиндра// ДАН УССР. - 1988. - Серия А, № 7. - с. 61 - 65.

197. Girka I.O., Lapshin V.I., Stepanov K.N. Alfven wave heating of plasma in devices with bumpy magnetic field// Contributed Papers. 20th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. - Lisboa, Portugal. - 1993. - Part 3. - p.III-877 – III-880.

198. Girka I.A., Lapshin V.I. Turbulent plasma heating in satellite Alfven resonances in devices with bumpy magnetic field// Abstracts. The Eighth Beer-Sheva International

Seminar on MHD-Flows and Turbulence. - Jerusalem, Israel. - 1996. - p. 70.

199. Долгополов В.В., Омельченко А.Я. О характере бесстолкновительного затухания электромагнитных волн в области сильной неоднородности холодной плазмы// Журнал экспериментальной и теоретической физики. - 1970. - т. 58, № 4. - с. 1384 - 1389.

200. Sugihara R., Yamanaka K. Resonance absorption of ICRF waves in edge plasma// Nuclear Fusion. – 1988. – v. 28, № 12. – p. 2161 – 2169.

201. Тимофеев А.В. Об альфвеновском нагреве плазмы в открытых ловушках// Физика плазмы. - 1988. - т.14, вып. 10. - с.1266 - 1269.

202. Girka I.O., Rutkevich P.P. Eigen kinetic Alfven waves localized between two Alfven resonances// 27th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Abstracts of Invited and Contributed Papers. Budapest, Hungary. - 2000. - p.87.

203. Girka I.O., Lapshin V.I., Rutkevich P.P. Eigen kinetic Alfven waves localized between two Alfven resonances// 27 European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Contributed Papers. Budapest, Hungary. - 2000. - ECA v. 24B - p.296 - 299.

204. Appert K., Hellsten T., Luetjens H. et al. The physics of wave – coupling in low – frequency plasma heating// Proceedings of the invited papers. 7<sup>th</sup> International Conference "Plasma Physics". Kiev. Invited Papers. World Scientific, Singapore. - 1987. - v. 2. - p. 1230 - 1255.

205. Abramovitz M. and Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. - Nat. Bureau of Standards, Applied Math. Series 55, 1964. - p.771 - 802.

206. Girka I.O., D'yakov V.Ye., Yegorenkov V.D., Stepanov K.N. Magnetohydrodynamic wave spectra in large tokamaks with noncircular cross section of magnetic surfaces// 8 Ukrainian Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Alushta (Crimea, Ukraine). Book of Abstracts. Published by NSC KIPT. Kharkov. - 2000. - p. 38.

207. Chance M.S., Perkins F.W., Sperling T. Linear absorption of magnetosonic normal

modes in a tokamak plasma// Bulletin of American Physical Society. – 1973. – v. 18. – p. 1273.

208. Girka I.O., Kasilov S.V., Lapshin V.I., Stepanov K.N. Enhancement of RF power absorption within the local Alfvén resonance when the density profile differs from the linear one (maximum or inflection point)// 6 Ukrainian Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, as a section of Conference "Physics in Ukraine". Alushta (Crimea, Ukraine). Book of Abstracts. Published by NSC KIPT. Kharkov. - 1998. - p. 84.

209. Moisan M., Zakrzewski Z. Plasma sources based on the propagation of electromagnetic surface waves// Journal of Physics D: Applied Physics. - 1991. - v. 24. - p. 1025 - 1048.

210. Kolobov V.I., Godyak V.A. Nonlocal electron kinetics in collisional gas discharge plasmas// IEEE Transactions on plasma science. - 1995. - v. 23, # 3. - p. 503 - 531.

211. Yasaka Y., Nozaki D., Koda K. et al. Production of large-diameter plasma using multi-slotted plasma antenna// Plasma Sources Science and Technology. - 1999. - v.8. - p. 530 - 533.

212. Moisan M., Pantel R., Hubert J. Propagation of a surface wave sustaining a plasma column at atmospheric pressure// Contributions to Plasma Physics. - 1990. - v. 30. - p. 293 - 314.

213. Nonaka S. Mode identification of electromagnetic waves for large-area planar RF plasma productions// Journal of the Physical society of Japan. - 1992. - v. 61, # 5. - p. 1449 - 1452.

214. Petelin M.I., Kasperek W. Surface corrugation for broadband matching of windows in powerful microwave generators// International Journal of Electronics. -1991. - v. 71, # 5. - p. 871 - 873.

215. Goebel D.M., Carmel Y., Nusinovich G.S. Advances in plasma-filled microwave sources// Physics of Plasmas. - 1999. - v. 6, # 5. - p. 2225 - 2232.

216. Hirota R. Theory of a solid state plasma waveguide in transverse magnetic field// Journal of Physical Society of Japan. – 1964. – v. 19, № 7. – p. 1130 – 1134.

217. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н., Мельник В.Н., Олефир В.П. Поверхност-

- ные волны на границе плазма – металл, распространяющиеся поперек магнитного поля// Радиотехника и электроника. – 1985. – т. 30, вып. 11. – с. 2195 – 2201.
218. Азаренков Н.А. Дементий О.И., Костенко В.В. Косые поверхностные магнитоплазменные волны на границе плазма – металл// Радиотехника и электроника. – 1988. – т. 33, вып. 3. – с. 546 – 549.
219. Бакунов М.И. Поверхностные электромагнитные волны при наличии неоднородного резонансного слоя на границе металл – изотропная плазма// Изв. вузов. Радиофизика. - 1988. - т. 31, № 1. - с. 25 - 28.
220. Гирка В.А., Гирка И.А. Влияние неоднородности плазмы на спектры азимутальных поверхностных волн// Изв.вузов. Радиофизика. - 1990. - т. 33, № 4. - с. 516 - 517.
221. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. - М.: Мир, 1975. - 525 с.
222. Girka I.A., Kovtun P.K. Azimuthal surface waves during plasma production in tokamaks//IEEE Conference Record - Abstracts. 1996 IEEE International Conference on Plasma Sciences. Boston, USA. – 1996. - p. 121.
223. Jaiman N.K., Tripathi V.K., Srivastava M.P. Millimeter wave generation in a plasma filled slow wave device// Plasma Physics. - 1997. - v. 7. p. 2687 - 2690.
224. Onishchenko I.N., Balakirev V.A., Korostelev A.M. et al. Coaxial plasma filled structures// Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on High Power Particle Beams. – Praha. Czech Republic. - 1996. - p. 426 - 429.
225. Аронов Б.А., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Электромагнитное излучение при возбуждении поверхностных волн в плазме электронным пучком// Журнал технической физики. - 1973. - т.43, № 12. - с. 2493 - 2498.
226. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. - М.: Наука, 1977. – 344 с.
227. Girka I.A., Girka V.A. Surface waves propagating along small azimuth in the fusion devices// Proceedings and Contributed Papers of International Conference on Plasma Physics Combined with 6<sup>th</sup> Latin American Workshop on Plasma Physics. FOZ DO IGUACU-PR-BRAZIL. - 1994. - v. 1. - p. 21 - 24.
228. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Турбулентные процессы в тороидальных систе-

- мах// Вопросы теории плазмы/ Под ред. М.А.Леонтовича. - М.: Атомиздат, 1967. - Вып.5. - с. 209 - 350.
229. Недоспасов А.В., Токарь М.З. Пристеночная плазма в токамаках// Вопросы теории плазмы./ Под ред. Б.Б.Кадомцева. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - Вып.18. - с. 68 - 208.
230. Азаренков Н.А., Остриков К.Н., Щербинина И.Б. Азимутальные поверхностные волны в коаксиальной полупроводниковой структуре с металлическими стенками// Радиотехника и электроника. - 1990. - т. 35, № 10. - с. 2031 - 2035.
231. Stenflo L., Gradov O.M. Electrostatic surface waves on a plasma with non – uniform boundary// Journal of Plasma Physics. – 1990. – v. 44, part 2. – p. 313 – 317.
232. Бакунов М.И., Пикулин В.Д., Степанов Н.С. О влиянии плазменного резонанса на свойства поверхностных волн// Физика плазмы. – 1987. – т. 13, № 1, с. 62 – 65.
233. Ghosh B., Das K.P. Modulational instability of electron plasma waves in a cylindrical wave guide// Plasma Physics and Controlled Fusion. – 1985. – v.27, № 9. – p. 969 – 982.
234. Zhelyazkov I., Spatchek K.H. Nonlinear surface waves on a plasma layer// Physical Review A. – 1988. – v. 38, № 12. – p.6304 – 6315.
235. Stix T.H. Waves in plasmas: highlight from the past and present// Physics of Fluids. -1990. - v.2, № 8. - p. 1729 - 1743.
236. Dengra A. Surface wave-particle interactions in a cylindrical plasma submitted in a static magnetic field// Physics of Plasmas. - 1997. - v.4, #12. - p. 4195 - 4200.
237. Владимиров С.В., Цытович В.П. Нелинейное взаимодействие поверхностных волн в плазме с учетом электромагнитных эффектов// Физика плазмы. – 1985. – т. 11, № 12. - с. 1458 – 1468.
238. Lawson W., Striffler C.D. A general linear growth rate formula for large orbit, annular electron beams// Physics of Fluids. – 1985. v. 28, № 9. – p. 2868 – 2877.
239. Киценко А.Б., Панкратов И.М., Степанов К.Н. О нелинейной стадии возбуждения монохроматических поверхностных волн потоком заряженных частиц в магнитном поле// Журнал Технической Физики. - 1974. - т. 44. - с. 2430 - 2432.

240. Chen K.W., Kim S.H., MacKinley M.C. Low-frequency azimuthally propagating (diocotron) waves in a non-neutral electron beam column// *Physics of Fluids*. - v.330, #10. - p. 3306 - 3308.
241. Балакирев В.А., Онищенко И.Н., Островский А.О. и др. Ускорение заряженных частиц электронным пучком в гофрированном плазменном волноводе// *Препринт ХФТИ 89-52*. – Харьков: ХФТИ АН УССР. – 1989. – 20 с.
242. Аксенова Л.А., Кейер А.П., Немировская Л.Л., Соколов Е.В. Экспериментальное исследование трансформации мод в волноводах с гофрированными стенками// *Изв. Вузов. Радиофизика*. – 1988. – т.31, № 10. – с. 1223 – 1228.
243. Онищенко И.Н., Сидоренко Д.Ю., Сотников Г.В. Взаимодействие электронного пучка с гофрированной коаксиальной линией, заполненной плазмой// *Физика плазмы*. – 1995. – т.21, № 8. – с. 708 – 714.
- I. N. Onishchenko, D. Yu. Sidorenko, G. V. Sotnikov", "Electron Beam Interaction with a Plasma-Filled Rippled Coaxial Waveguide", "Plasma Physics Reports", 1995, volume 21, No. 8, pages 670-676.
244. Азаренков Н.А., Костенко В.В. Дисперсионные свойства поверхностных волн на границе плазмы с гофрированным идеально проводящим металлом// *Радиотехника и электроника*. – 1988. – т. 33, № 5. – с.1027 - 1030.
245. Murphy A.B. Waves in the edge plasma during ion cyclotron resonance heating// *Fusion Engineering and Design*. - 1990. - v. 12. - p. 79 - 92.
246. Noterdaeme J.-M. Experimental results on the edge effects during ICRF heating// *Fusion Engineering and Design*. - 1990. - v. 12. - p. 127 - 137.
247. Girka V.O., Girka I.O. Delaying of transverse surface waves in isotropic plasma waveguide with the noncircular cross - section // 6th International Conference "Mathematical Methods in Electromagnetic Theory"(MMET'96). Proceedings. – Lviv. Ukraine. - 1996. - p. 385 - 388.
248. Гирка В.А., Гирка И.А. Излучение азимутальных поверхностных волн из узкой щели волновода// *Радиотехника и электроника*. – 1992. – т. 37, № 3. – с. 419 - 422.
249. Росляков Н.М., Теплякова Н.А. Излучение вытянутой сфероидной антенной с



плазменным покрытием// Радиотехника и электроника. – 1992. – т. 37, № 4. – с. 583 - 592.

250. Mishra Ganeswar, Tripathi Vipin K., Jain V.K. Effect of plasma and dielectric loading on the slow-wave properties of a traveling wave tube//IEEE Transactions on Electronic Devices. – 1990. – v. 37, № 6, part 2. – p. 1561 - 1565.

251. Girka I.A., Zolotukhin A.V. Surface waves in gyrotropic plasma, bounded with metallic chamber of arbitrary cross – section// 1993 IEEE International Conference on Plasma Science. Conference Record - Abstracts. - Vancouver, Canada. – 1993. - p. 65.

252. Grekov D.L., Lapshin V.I., Yakovlev M.M. Surface waves on the boundary plasma – metal in the elliptic plasma cylinder// Вопросы Атомной Науки и Техники. НИЦ «ХФТИ». Серия: Физика Плазмы. – 1999. – вып. 1, 2. – с. 171 – 172.

253. Girka I.A., Girka V.A., Zolotukhin A.V. Surface waves in gyrotropic plasma bounded with the square cross-sectional metallic waveguide// Proceedings and Contributed Papers. International Conference "Physics in Ukraine". Plasma Physics. – Kiev. - 1993. - p. 104 - 107.

254. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н., Остриков К.Н. Азимутальные поверхностные волны в коаксиальном резонаторе с полупроводниковым заполнением// Письма в ЖТФ. - 1989. - т. 15, № 14. - с. 68 - 71.

255. Seshadri S.R. Excitation of surface waves on a perfectly conducting screen covered with anisotropic plasma// IRE Transactions. MTT. - 1962. - v. 10, № 6. - p. 573 - 578.

256. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н., Костенко В.В. Влияние диэлектрической прослойки на дисперсионные свойства поверхностных волн// Журнал технической физики. - 1986. - т. 56, № 2. - с. 391 - 393.

257. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н., Остриков К.Н. Дисперсионные свойства ПВ в двухслойной плазменной структуре, ограниченной металлом// Радиотехника и электроника. - 1990. - т. 35, № 1. - с. 29 - 34.